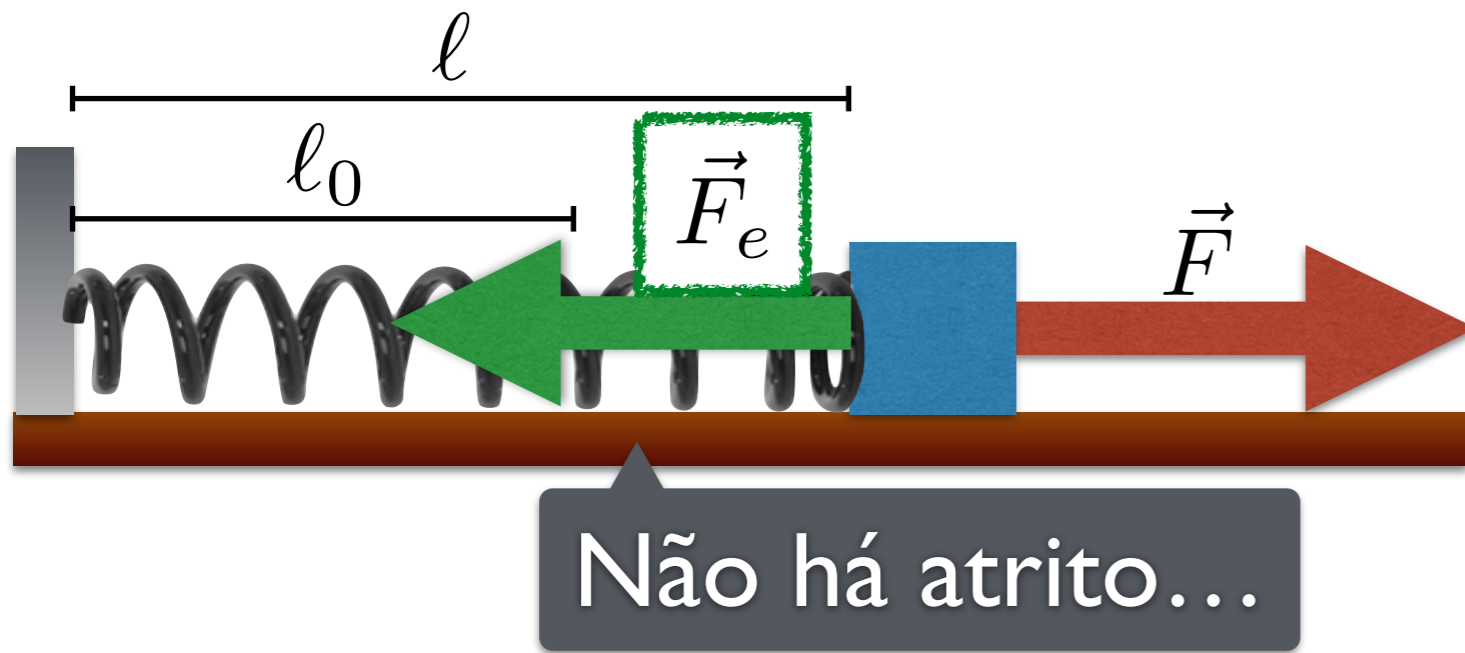
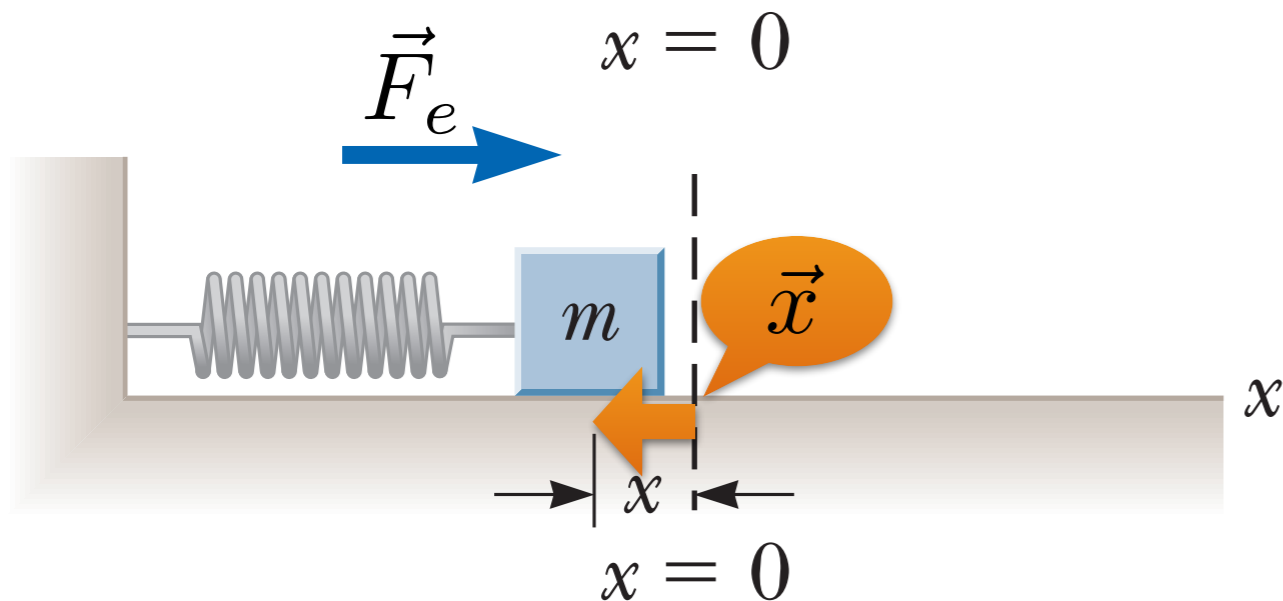
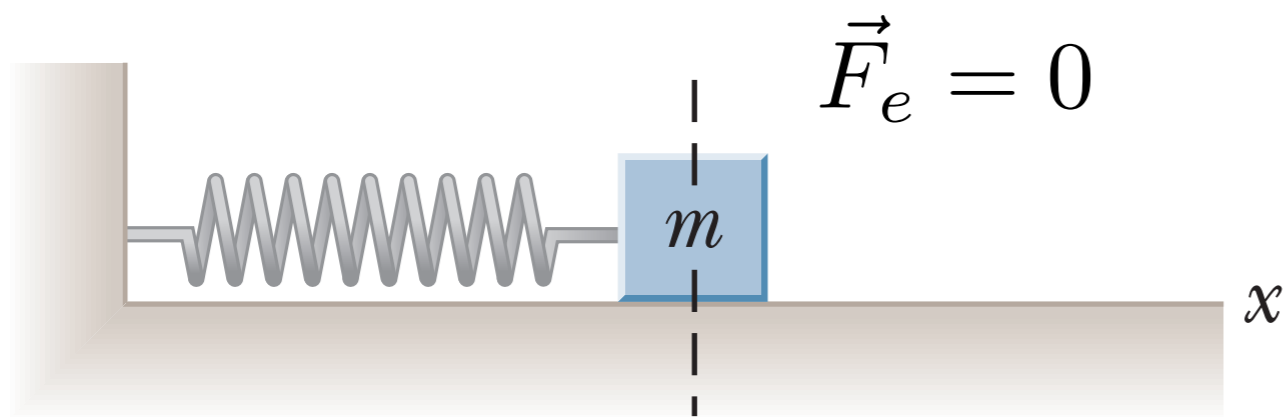
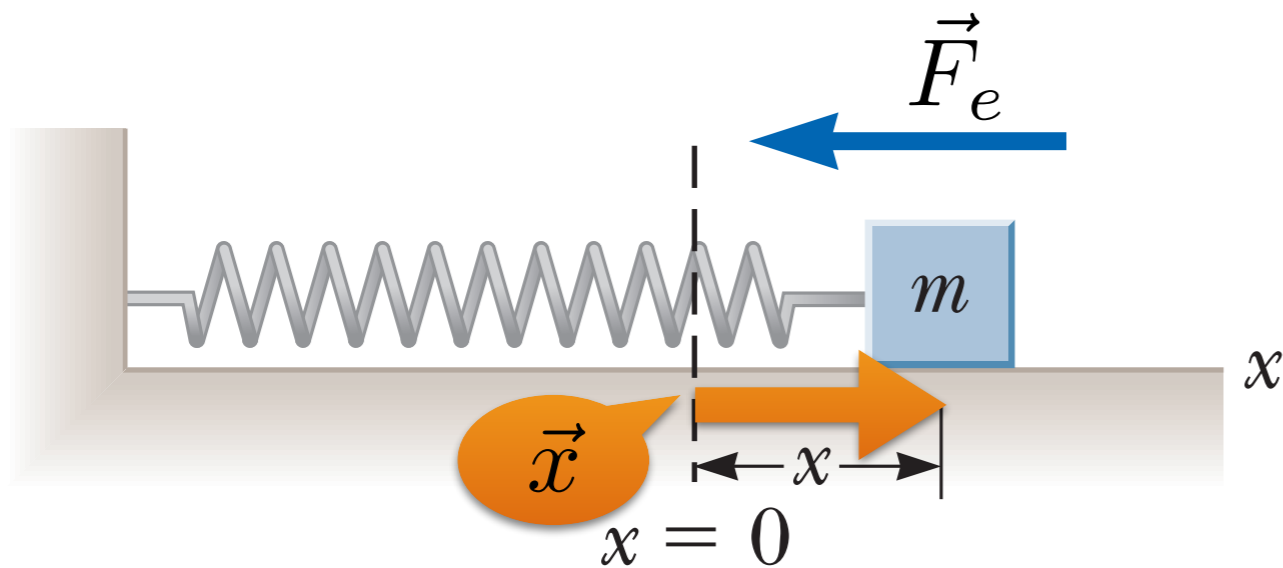


Movimento harmónico simples



Se o corpo está parado quando a mola está esticada, tem de haver outra força que anule a força que estamos a aplicar...

Movimento harmónico simples



Atendendo à relação linear que observámos:

$$\vec{F}_e = -k\vec{x}$$

Lei de Hooke

(só é válida enquanto a relação entre força e elongação for linear...)

\vec{x} é o vetor elongação, que mede o **desvio** em relação à posição de equilíbrio

Movimento harmónico simples

Se só atuar a força elástica:

$$\vec{F}_e = m\vec{a}$$

$$-k\vec{x} = m\vec{a}$$

$$-kx = ma$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

??

Projetando
na direção do
movimento

Movimento harmónico simples

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

~~$$x(t) = \cos(\omega t)$$~~

~~$$x(t) = A \cos(\omega t)$$~~

~~$$x(t) = B \sin(\omega t)$$~~

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

É solução da equação diferencial e tem duas constantes “ajustáveis”



Como a equação diferencial é de segunda ordem, esta é **A** solução

Movimento harmónico simples

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Se fizermos a mudança de variáveis: $\begin{cases} A = C \sin \delta \\ B = C \cos \delta \end{cases}$

$$x(t) = C \sin \delta \cos(\omega t) + C \cos \delta \sin(\omega t)$$

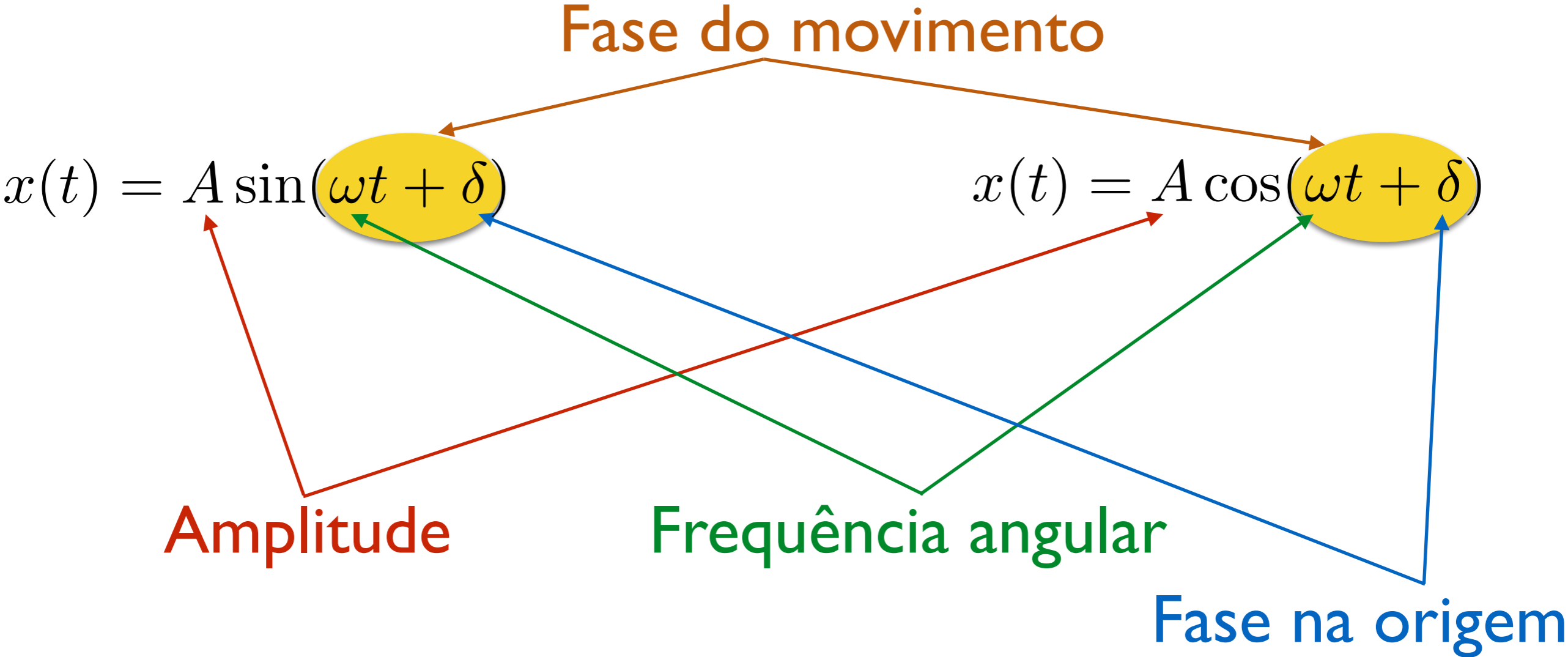
$$x(t) = C \sin(\omega t + \delta)$$

Se fizermos a mudança de variáveis: $\begin{cases} A = C \cos \delta \\ B = -C \sin \delta \end{cases}$

$$x(t) = C \cos \delta \cos(\omega t) - C \sin \delta \sin(\omega t)$$

$$x(t) = C \cos(\omega t + \delta)$$

Movimento harmónico simples

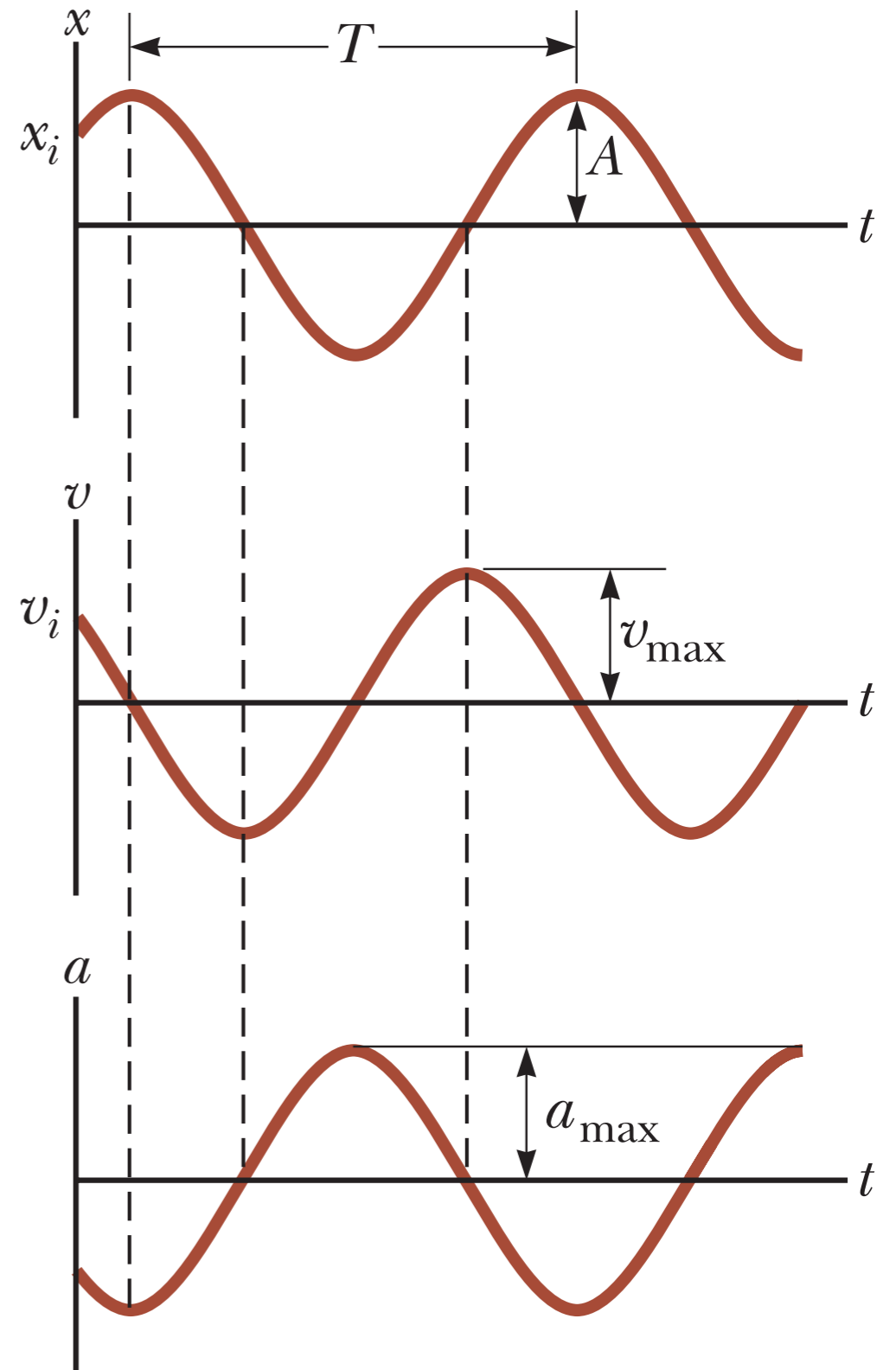


Movimiento harmónico simples

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$



Movimento harmónico simples

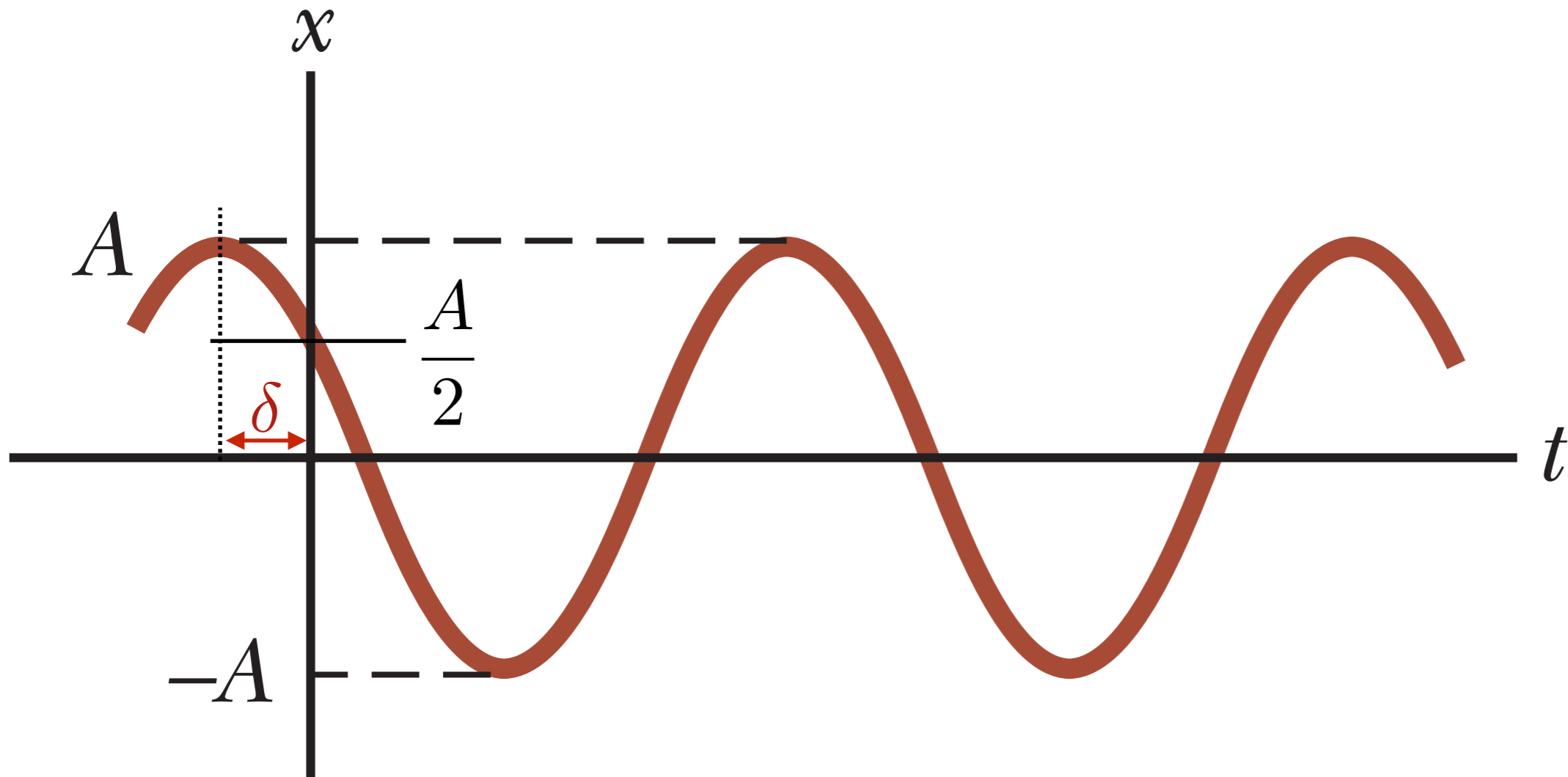


$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad x(0) = A \sin(\delta) \rightarrow \sin(\delta) = \frac{1}{2}$$

$$v(0) = \omega A \cos(\delta)$$

$$\delta \neq \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad \delta = \frac{5\pi}{6}$$

Movimiento harmónico simple

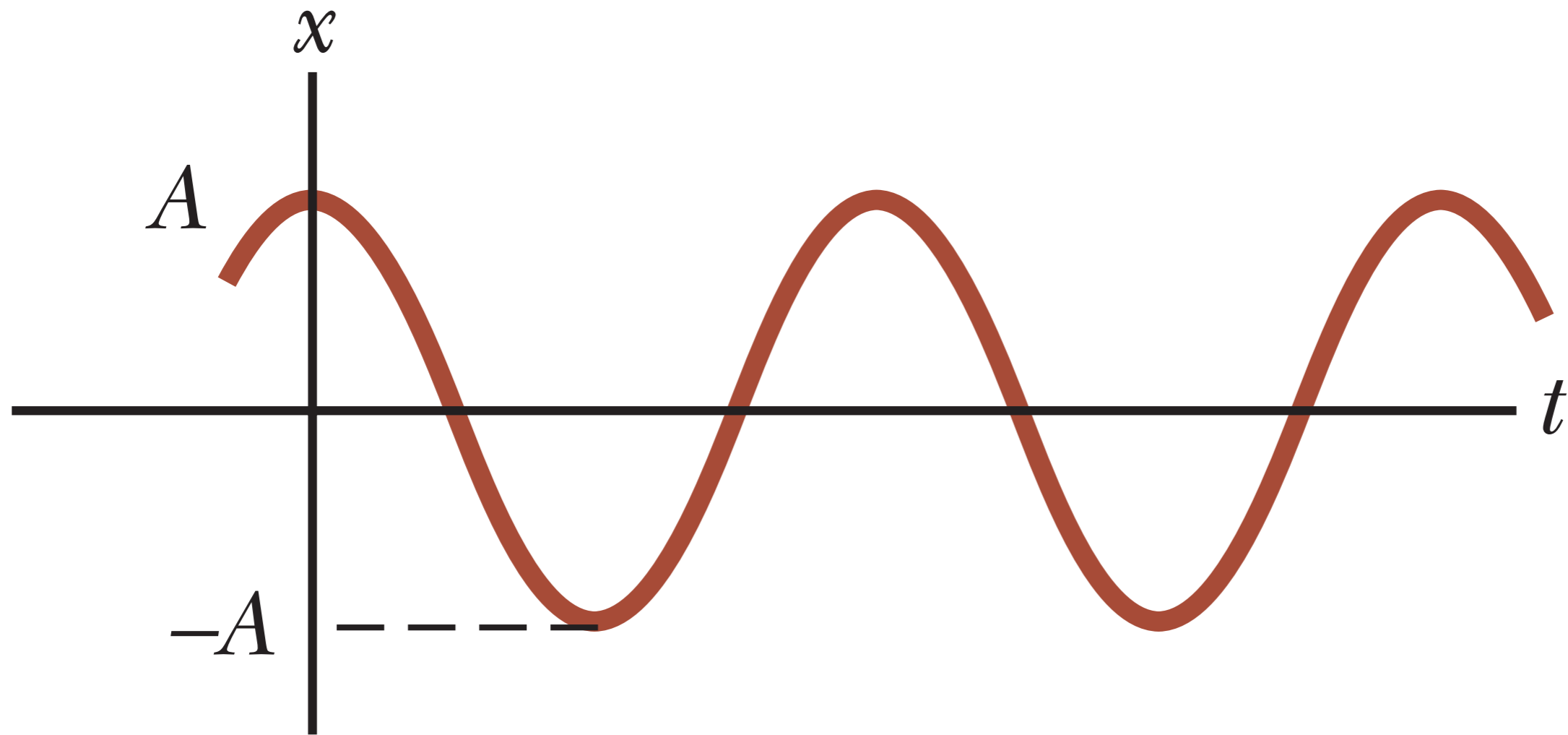


$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad x(0) = A \cos(\delta) \rightarrow \cos(\delta) = \frac{1}{2}$$

$$v(0) = -\omega A \sin(\delta)$$

$$\delta = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad \delta = \frac{5\pi}{3}$$

Movimiento harmónico simples



$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$



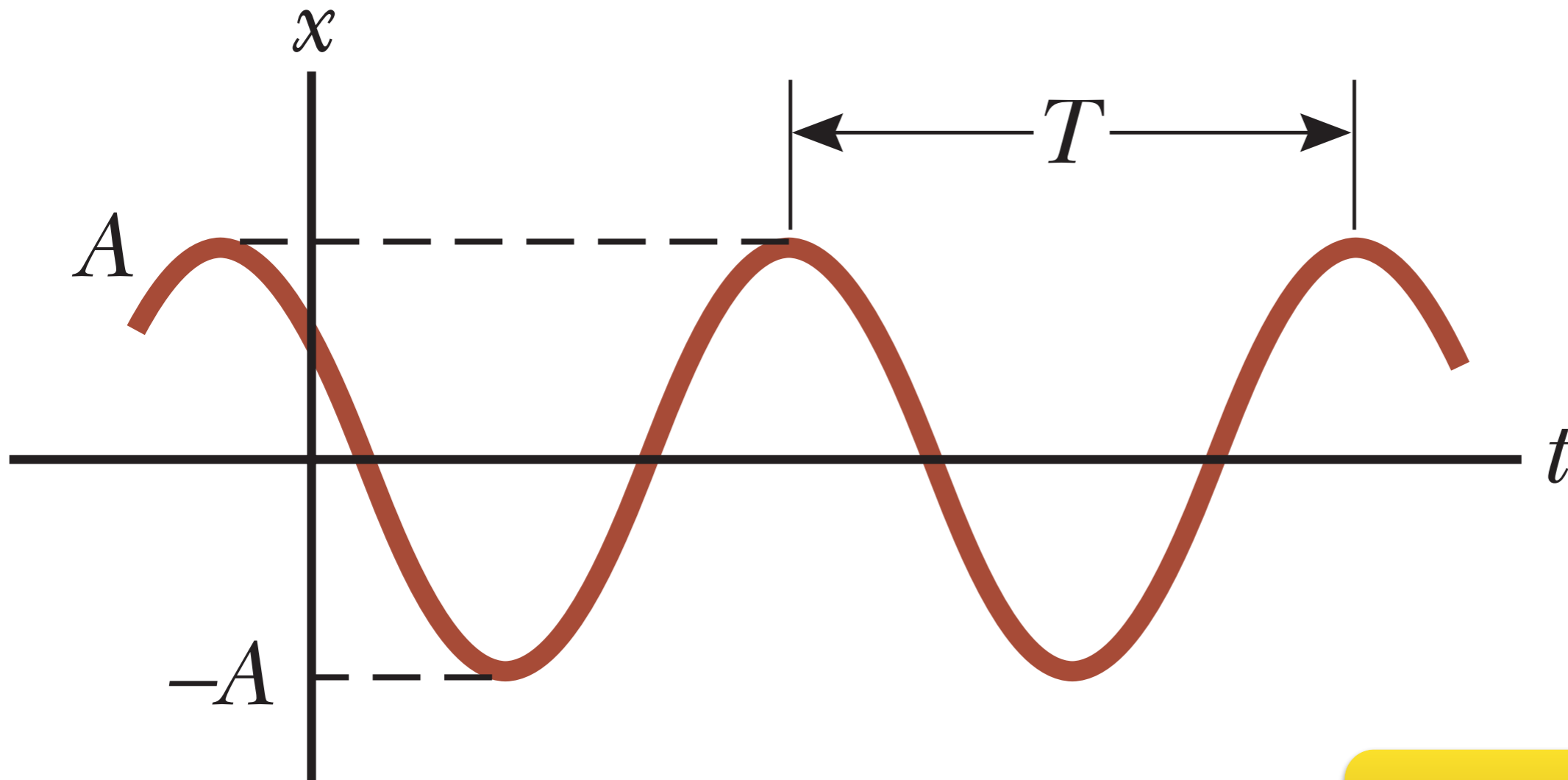
$$\delta = 0$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$



$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

Movimento harmônico simples



$$\omega(t + T) + \delta = \omega t + \delta + 2\pi$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Frequência do movimento (Hz)

Período do movimento

Movimento harmónico simples

A força elástica é conservativa e $E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2$
 $= \frac{1}{2}k [A \cos(\omega t + \delta)]^2$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m [-A\omega \sin(\omega t + \delta)]^2$$

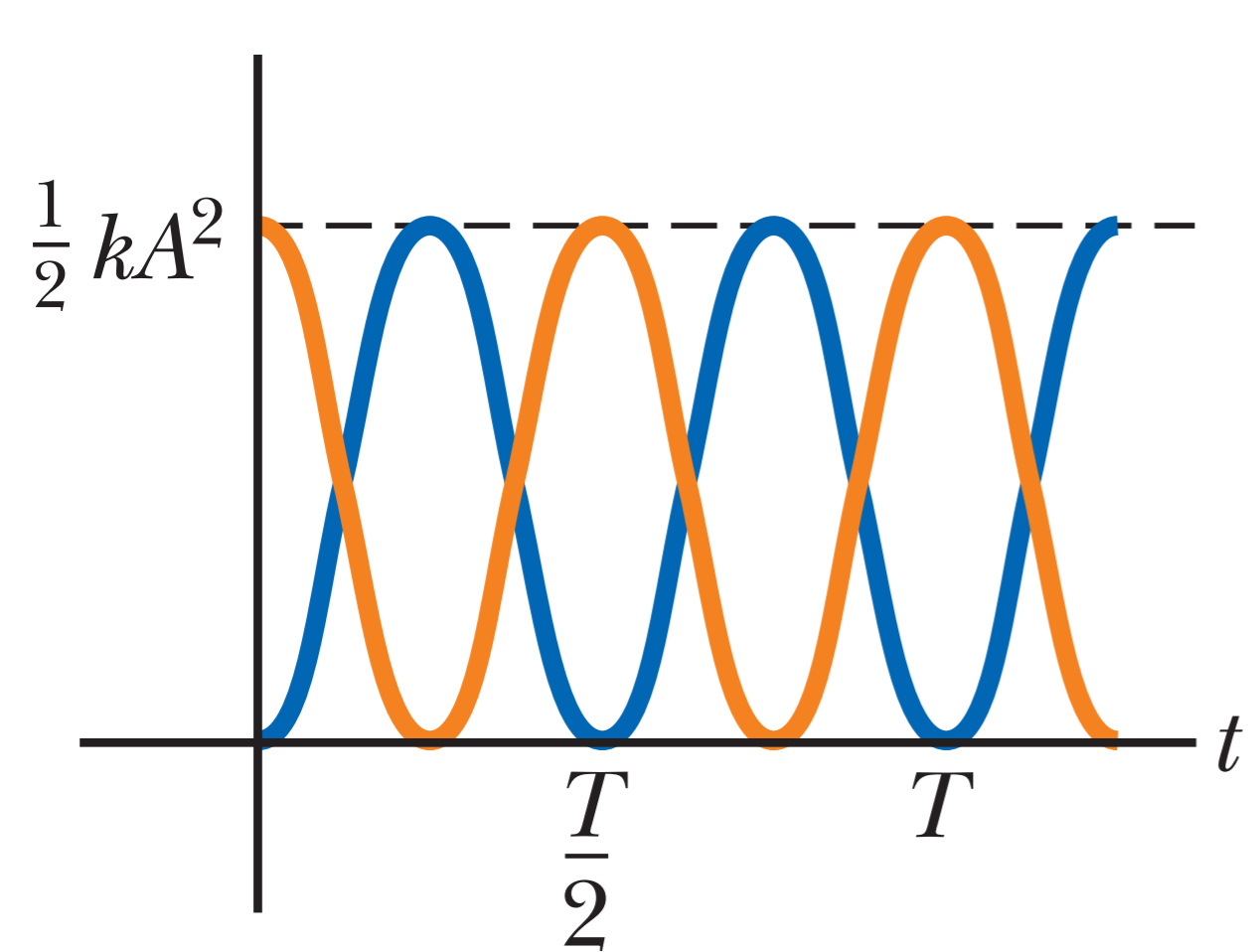
$$E_m = E_c + E_{p_e} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$
$$= \frac{1}{2}kA^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

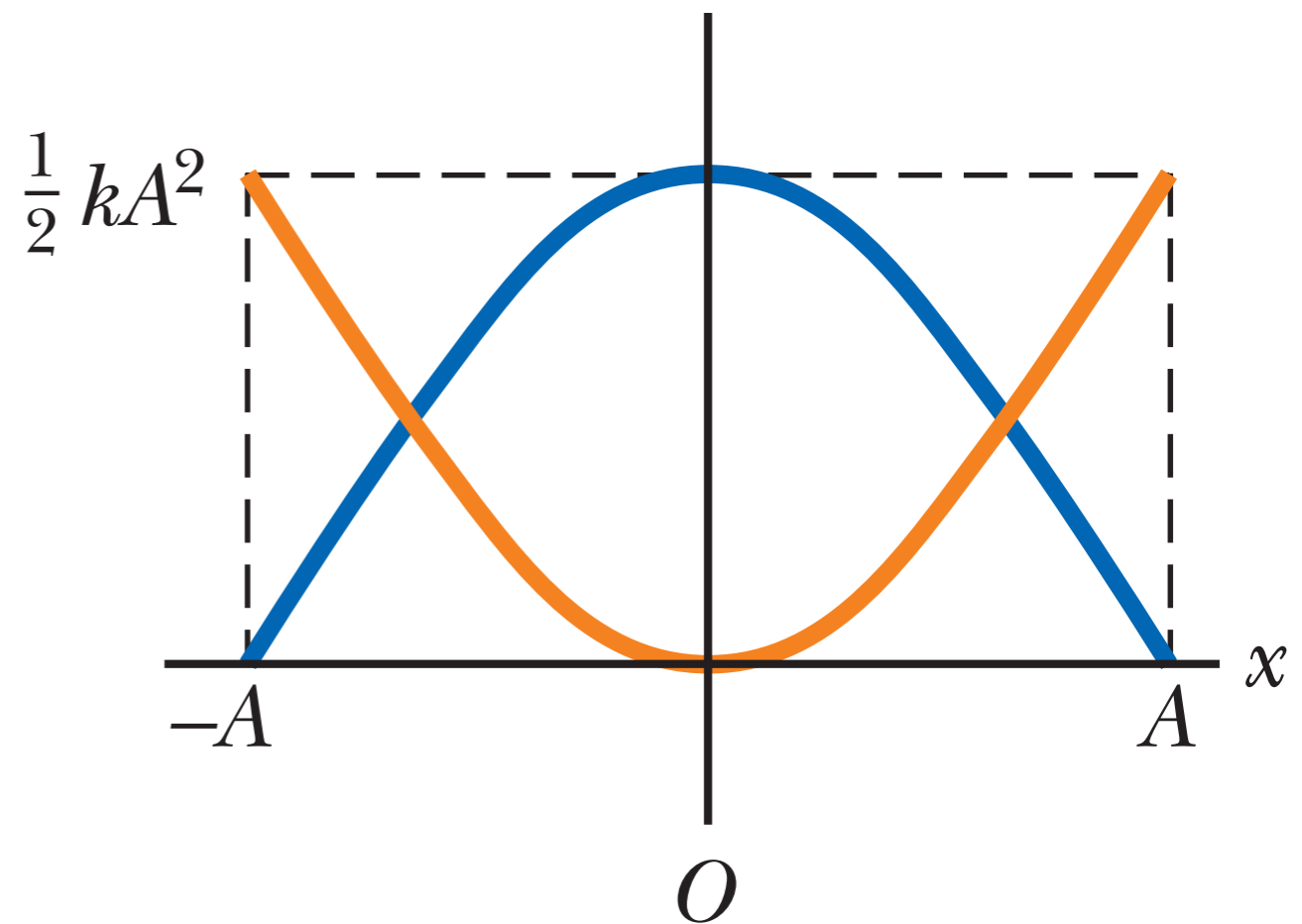
$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

Movimiento harmónico simples

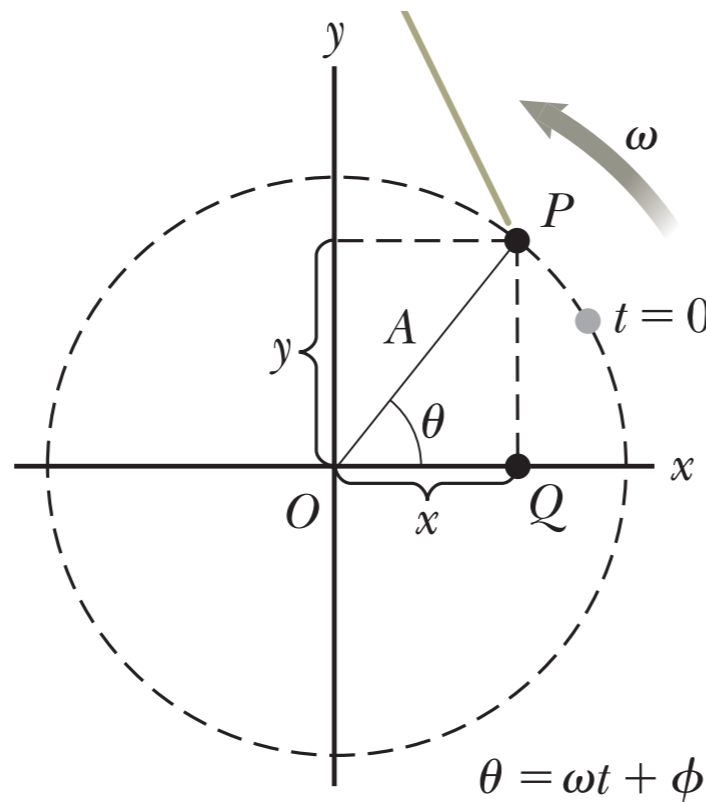


$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$
$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

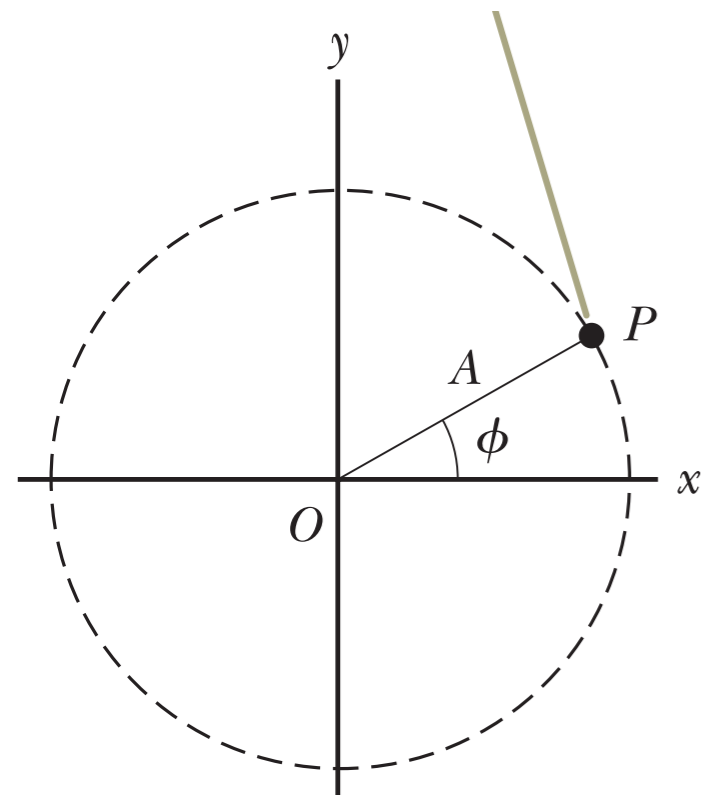


Movimento circular uniforme

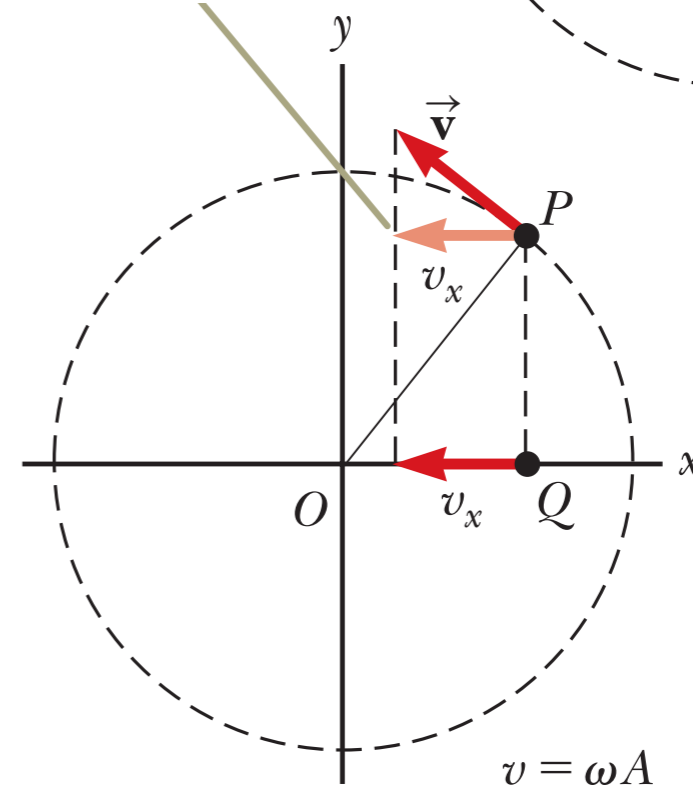
A partícula descreve um movimento circular uniforme



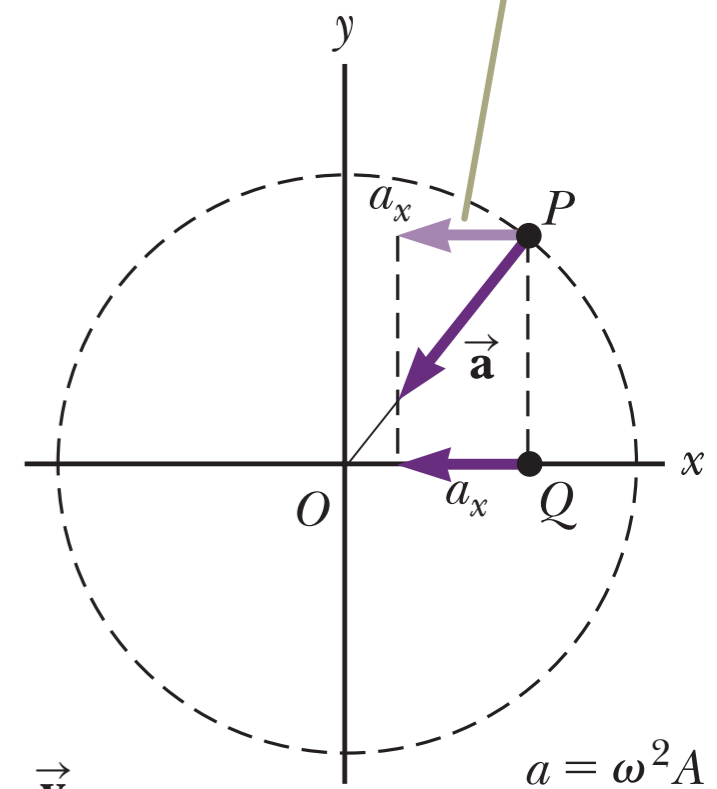
Partícula está em P no instante $t=0$



A velocidade horizontal de P é igual à de Q

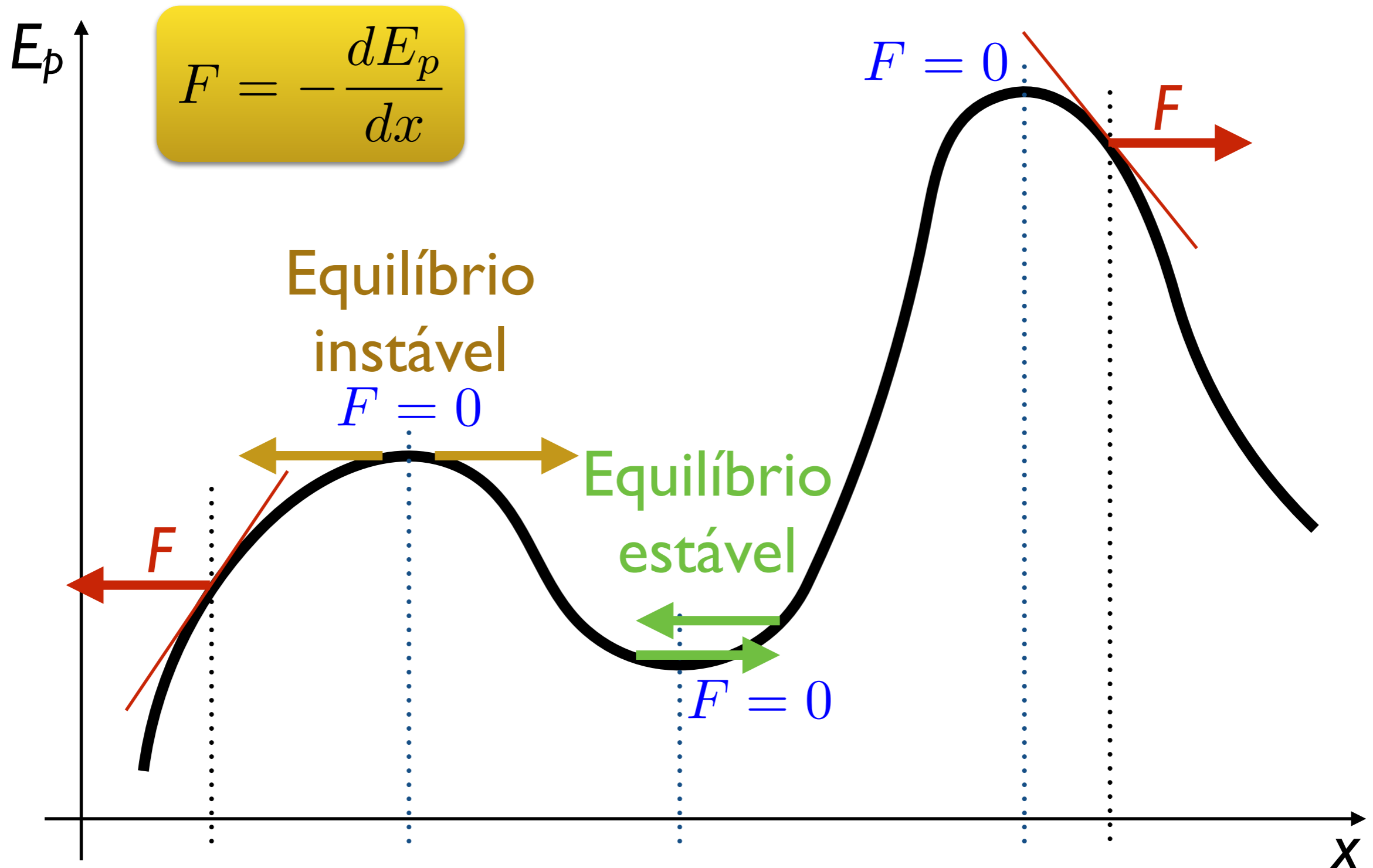


O mesmo se passa com a aceleração



A “sombra” de P descreve um MHS

Equilíbrio



$F = 0$ ➡ É um ponto de equilíbrio!

Equilíbrio

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

É nula se x_0 for um ponto de equilíbrio

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -\left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \dots$$

$$F = -k(x - x_0)$$

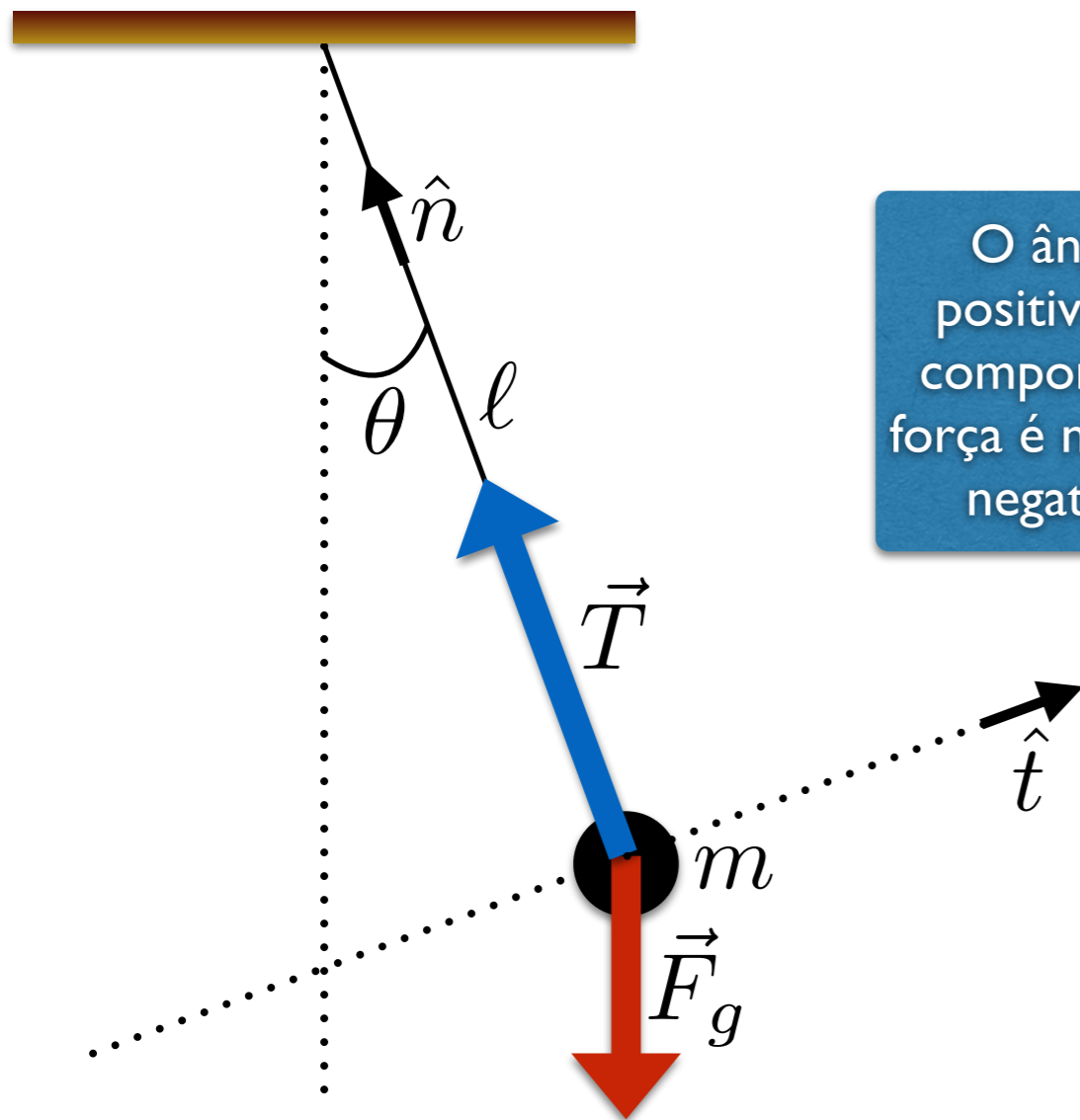
$$k = \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0}$$

Num ponto de equilíbrio estável, $k > 0$!

Equilíbrio

Se um sistema físico estiver num ponto de equilíbrio **estável e for ligeiramente perturbado, o seu movimento será sempre um movimento harmónico simples em torno do ponto de equilíbrio!**

Pêndulo simples



O ângulo é positivo mas a componente da força é no sentido negativo ...

Velocidade linear...

$$\vec{T} + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} T - mg \cos \theta = ma_n \\ -mg \sin \theta = ma_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} T - mg \cos \theta = ma_n \\ -mg \sin \theta = m \frac{d}{dt} \left(\ell \frac{d\theta}{dt} \right) \end{cases}$$

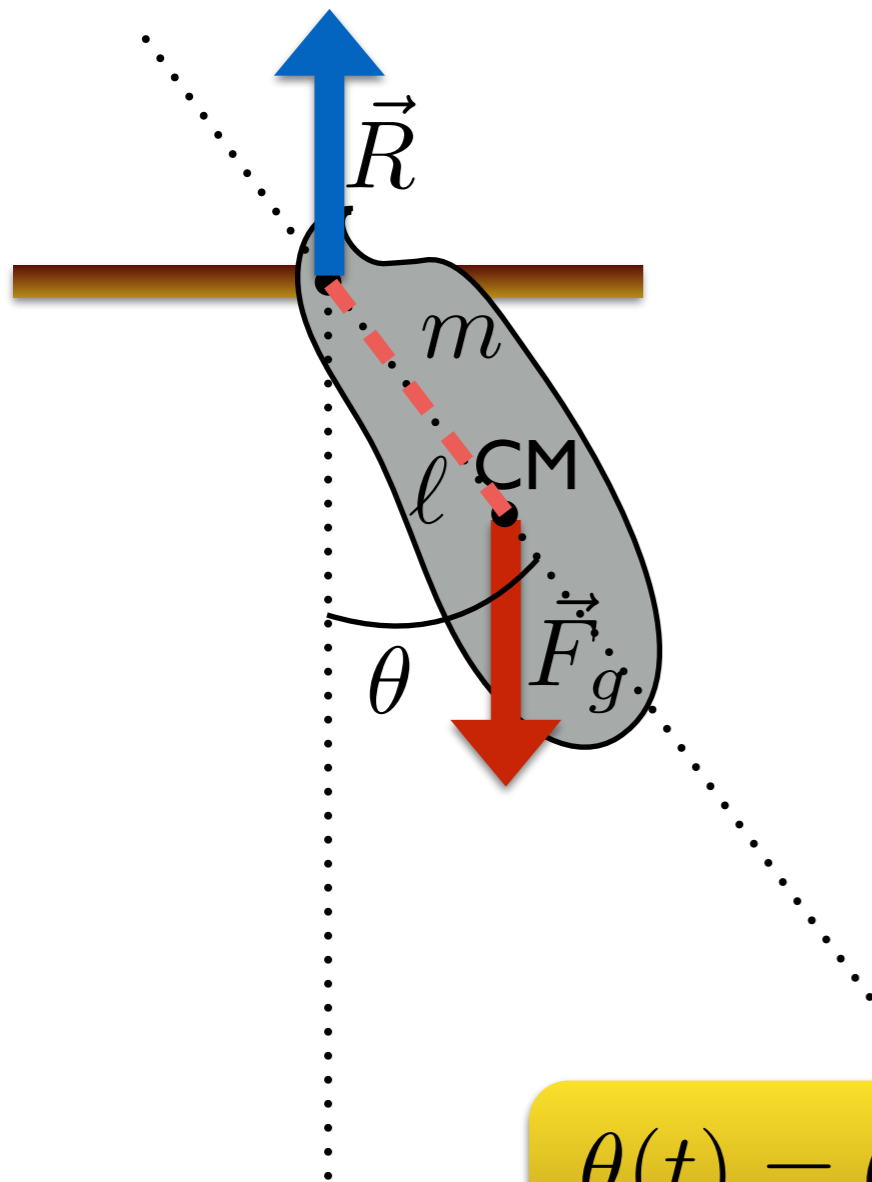
$$\begin{cases} T - mg \cos \theta = ma_n \\ -\frac{g}{\ell} \sin \theta = \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T - mg \cos \theta = ma_n \\ -\frac{g}{\ell} \theta \approx \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Pêndulo físico

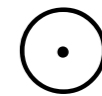


Escolhendo o ponto de aplicação da força R (o “prego”) para calcular os torques

$$\vec{R} + \vec{F}_g = 0$$

$$\vec{\tau}_R + \vec{\tau}_{F_g} = I\vec{\alpha}$$

$$mgl \sin \theta = I\alpha$$



O sentido positivo para a medida de ângulos (e suas derivadas) é o sentido anti-horário

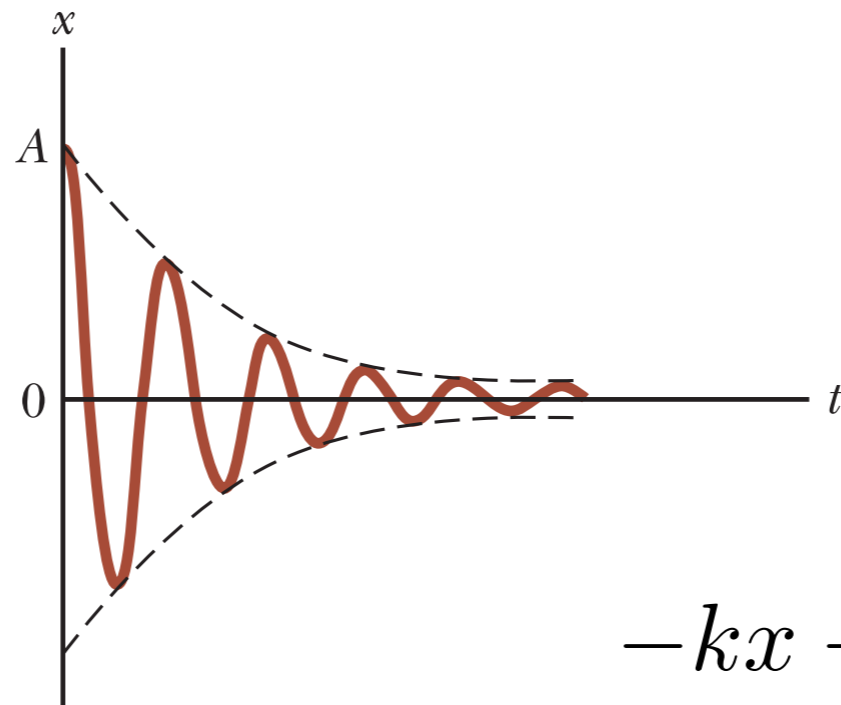
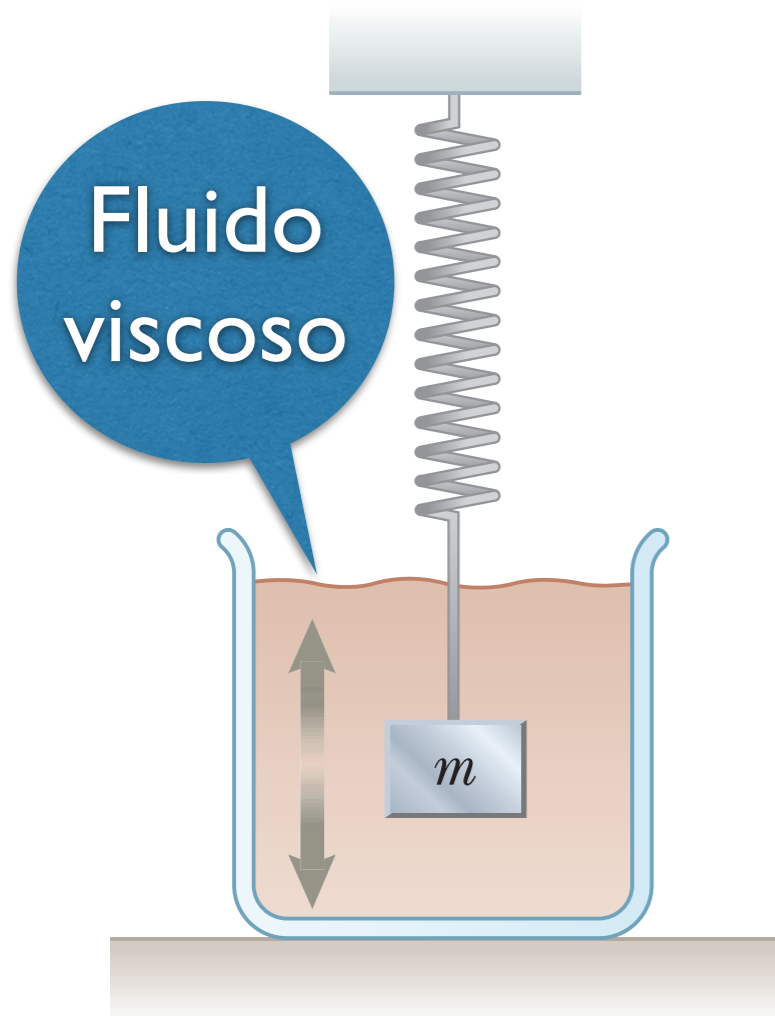
$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \delta)$$

$$-mgl \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$-mgl\theta \approx I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} = \sqrt{\frac{mgl}{I_{CM} + ml^2}}$$

Movimiento harmónico simple amortecido



$$-kx - \gamma v = ma$$

$$-kx - \gamma \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Ansatz:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \delta)$$

Movimiento harmónico simple amortecido

$$-kx - \gamma \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = -\lambda Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \delta) - Ae^{-\lambda t} \omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$a(t) = \lambda^2 Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \delta) - Ae^{-\lambda t} \omega^2 \cos(\omega t + \delta) + 2\lambda\omega Ae^{-\lambda t} \sin(\omega t + \delta)$$

Movimento harmónico simples amortecido

A igualdade só se verifica para qualquer t se os pré-factores forem nulos....

$$\begin{aligned} [-k + \gamma\lambda - m(\lambda^2 - \omega^2)] Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \delta) &= \\ &= [2m\lambda\omega - \gamma\omega] Ae^{-\lambda t} \sin(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -k + \gamma\lambda - m(\lambda^2 - \omega^2) = 0 \\ 2m\lambda\omega - \gamma\omega = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}} \\ \lambda = \frac{\gamma}{2m} \end{cases}$$

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \delta)$$

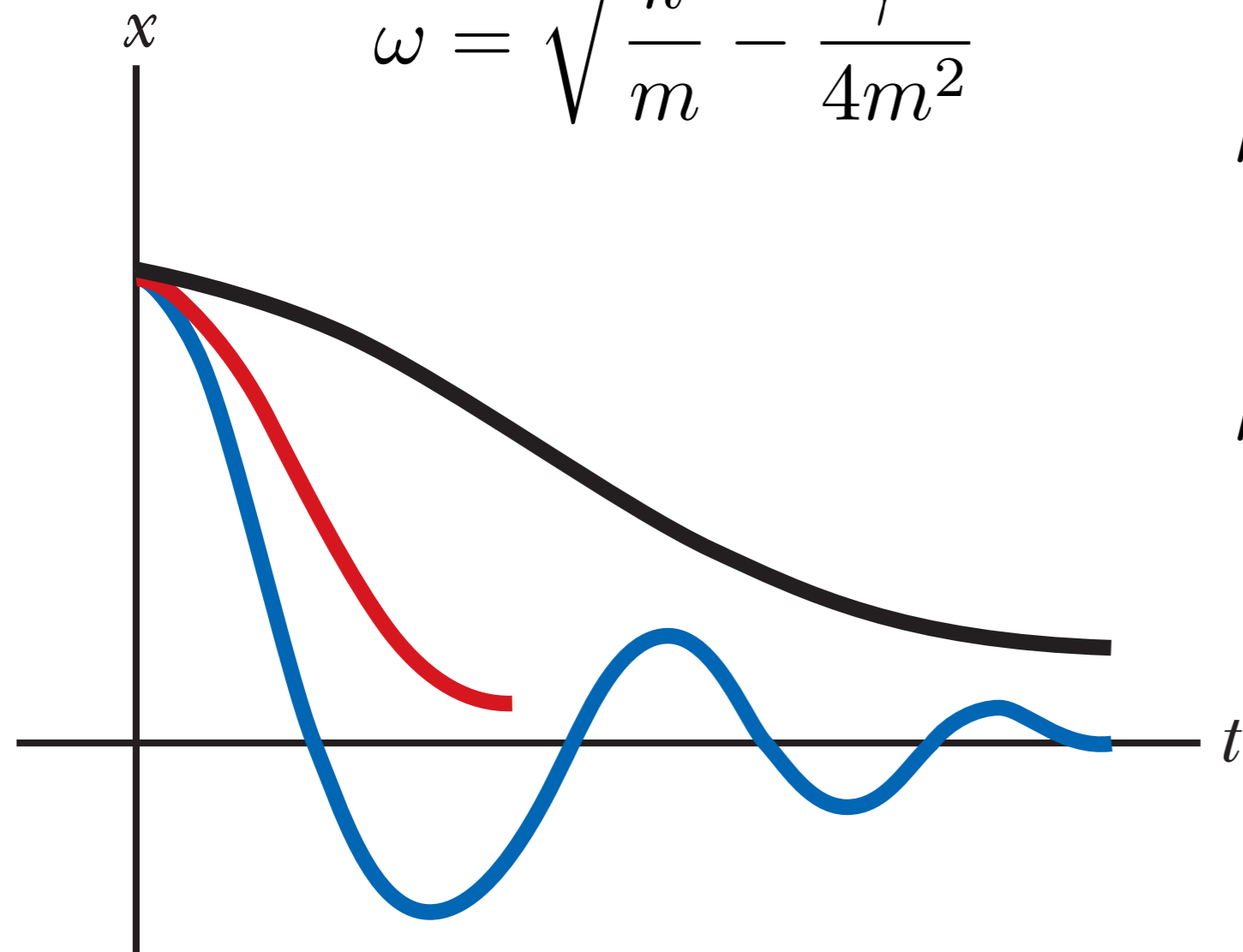
Movimento harmónico simples amortecido

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$$

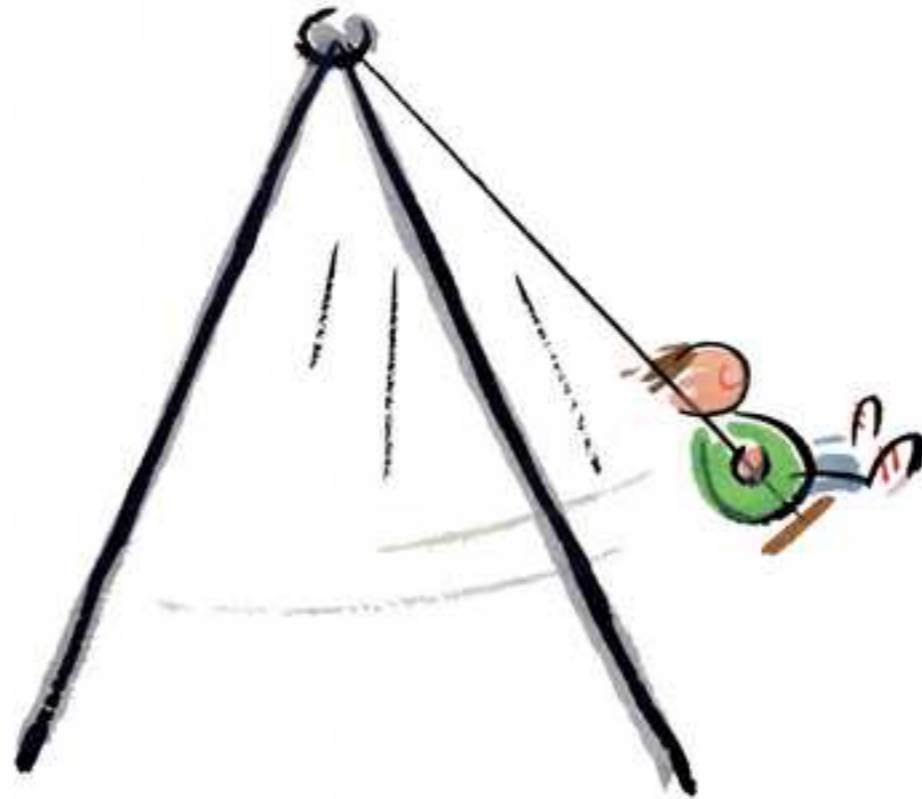
$$k < \frac{\gamma^2}{4m} \quad \text{Sobre-amortecido}$$

$$k = \frac{\gamma^2}{4m} \quad \text{Amortecido criticamente}$$

$$k > \frac{\gamma^2}{4m} \quad \text{Sub-amortecido}$$



Movimento harmónico simples amortecido e forçado



$$-kx - \gamma v = ma$$

Qual é a altura ideal para empurrar a criança?

Movimento harmónico simples amortecido e forçado

$$-kx - \gamma v + F_0 \cos(\omega t) = ma$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\lambda \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\lambda = \frac{\gamma}{2m}$$

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t + \delta\right) +$$

Esta parcela é
“transitória”...

$$+ \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

Movimento harmónico simples amortecido e forçado

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

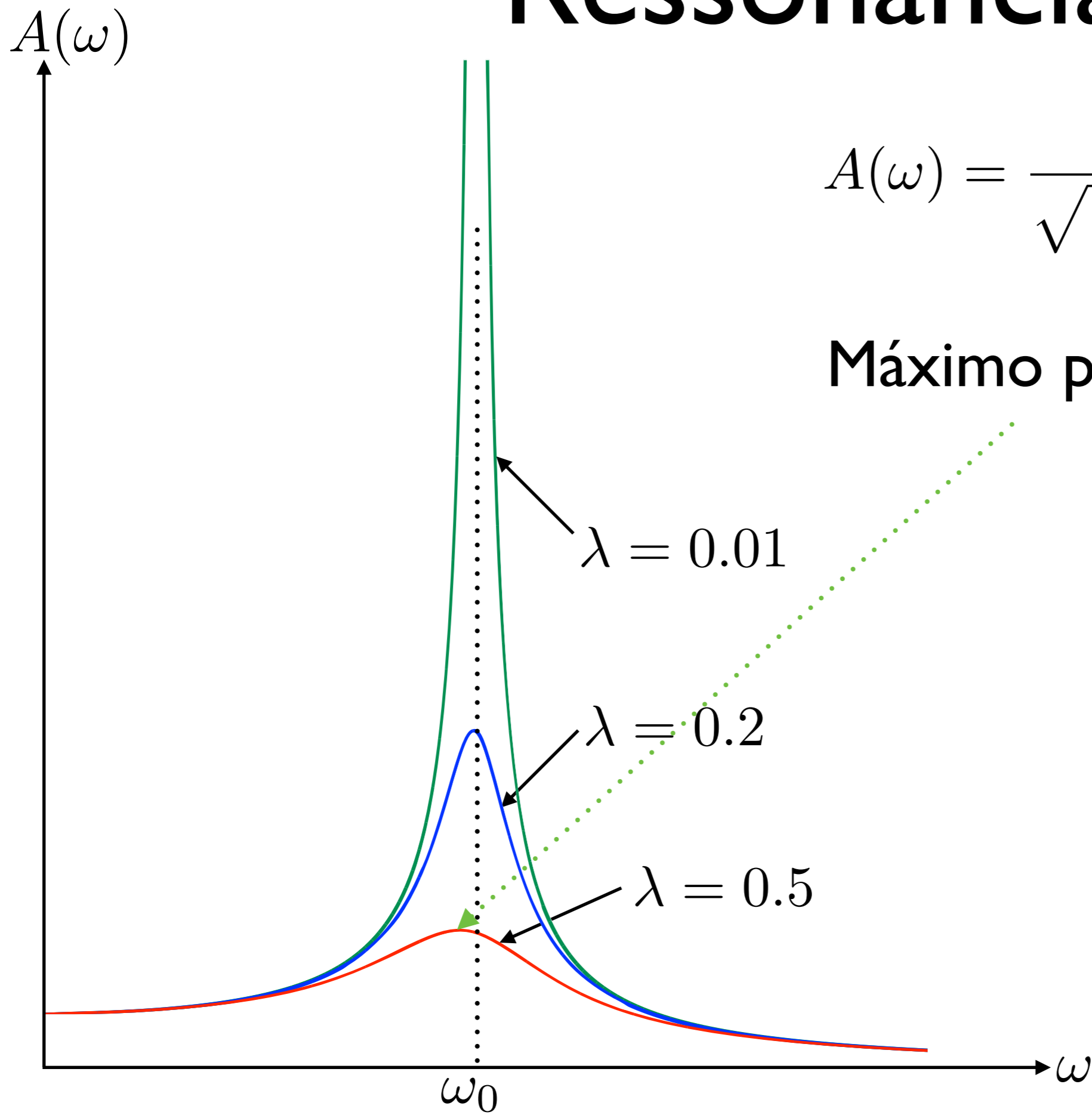
A amplitude da oscilação depende da **diferença** entre as frequências de oscilação “**imposta**” e “**natural**”

A oscilação do sistema dá-se com **a mesma frequência** da força periódica externa

... mas o sistema e a força periódica externa **não estão em fase**...

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Ressonância



$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

Máximo para $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\lambda = \frac{\gamma}{2m}$$

Ressonância

**GALE CAUSES
BRIDGE
TO SWAY**

Ponte de Tacoma Narrows, 1940