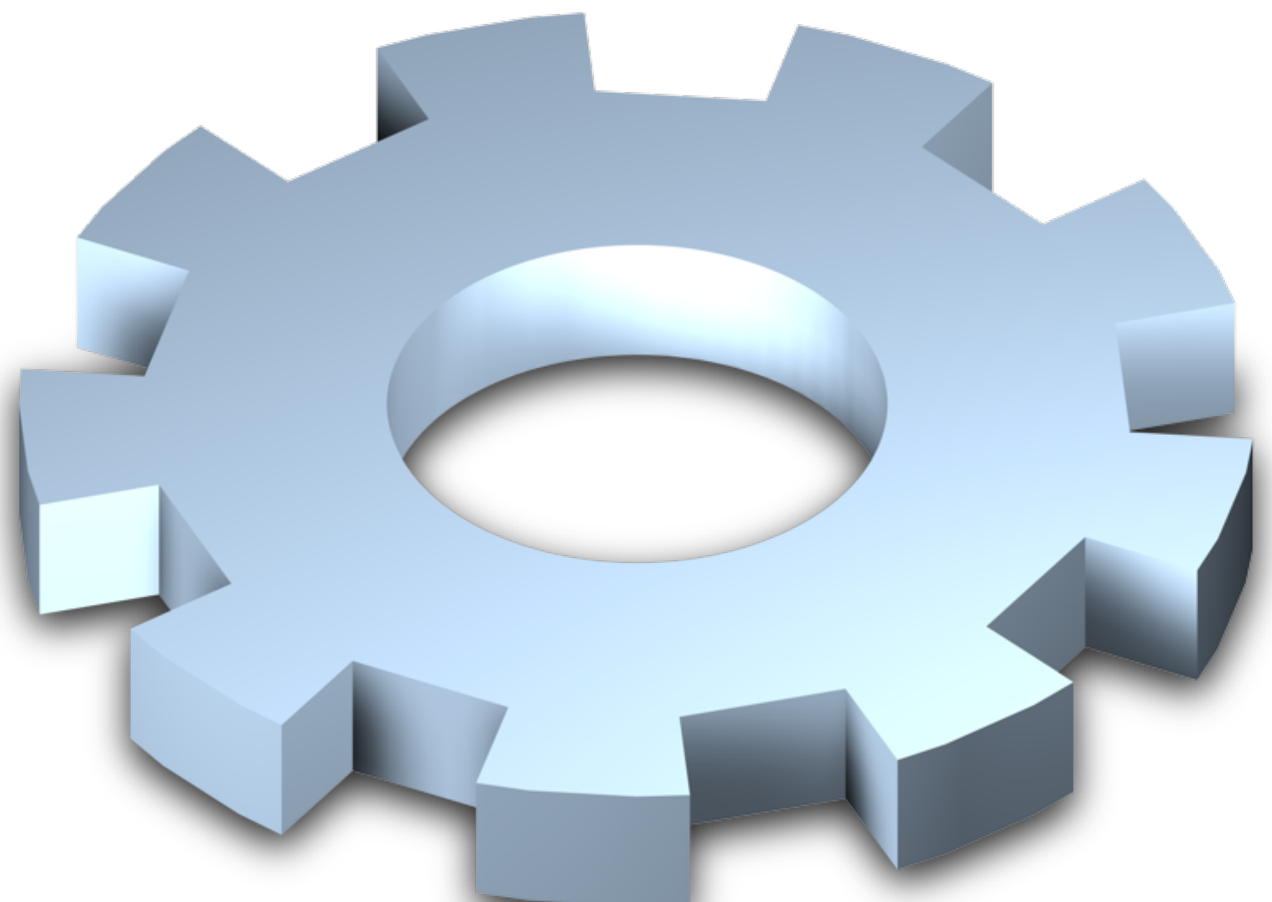
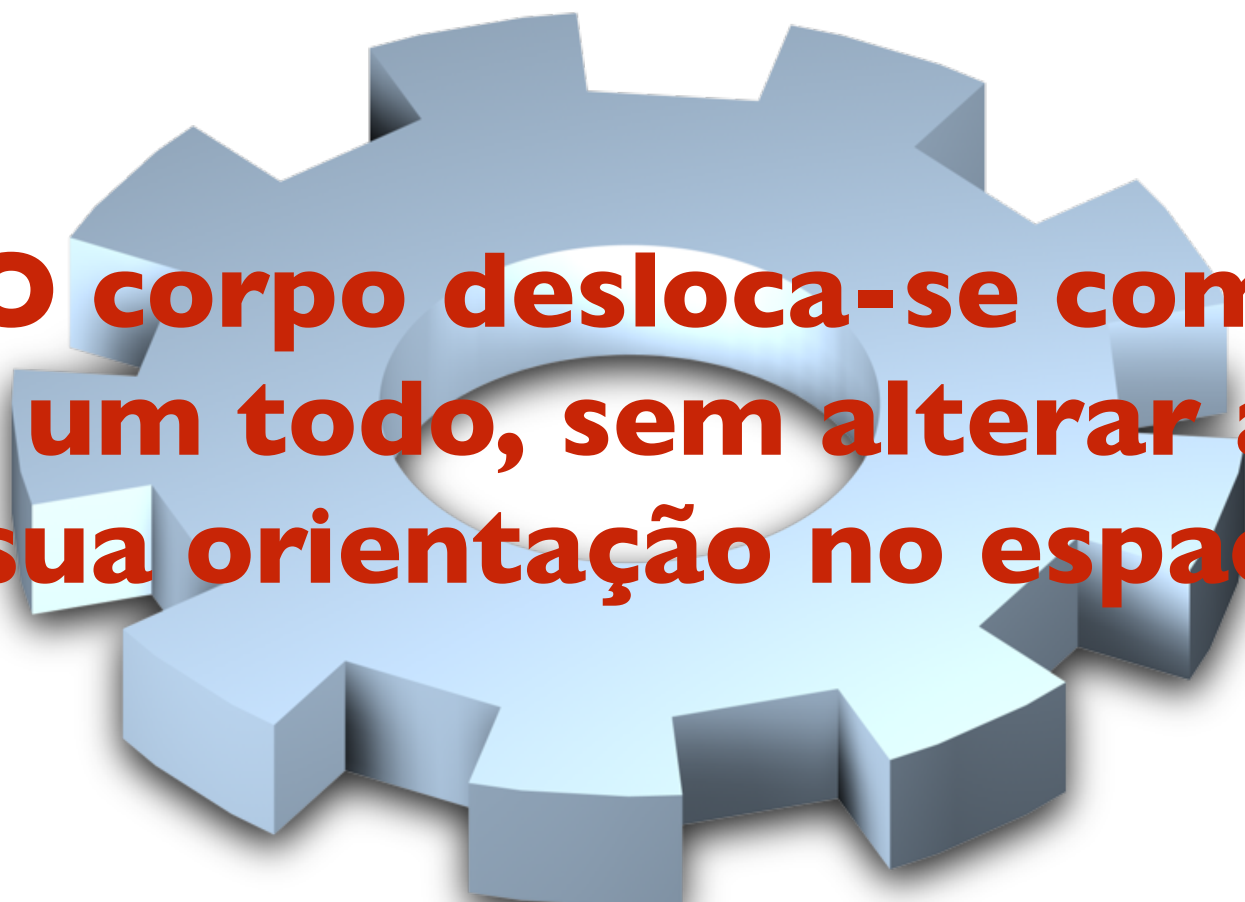
# Movimento “geral” de um corpo



**Este movimento é na realidade a composição de dois movimentos distintos...**

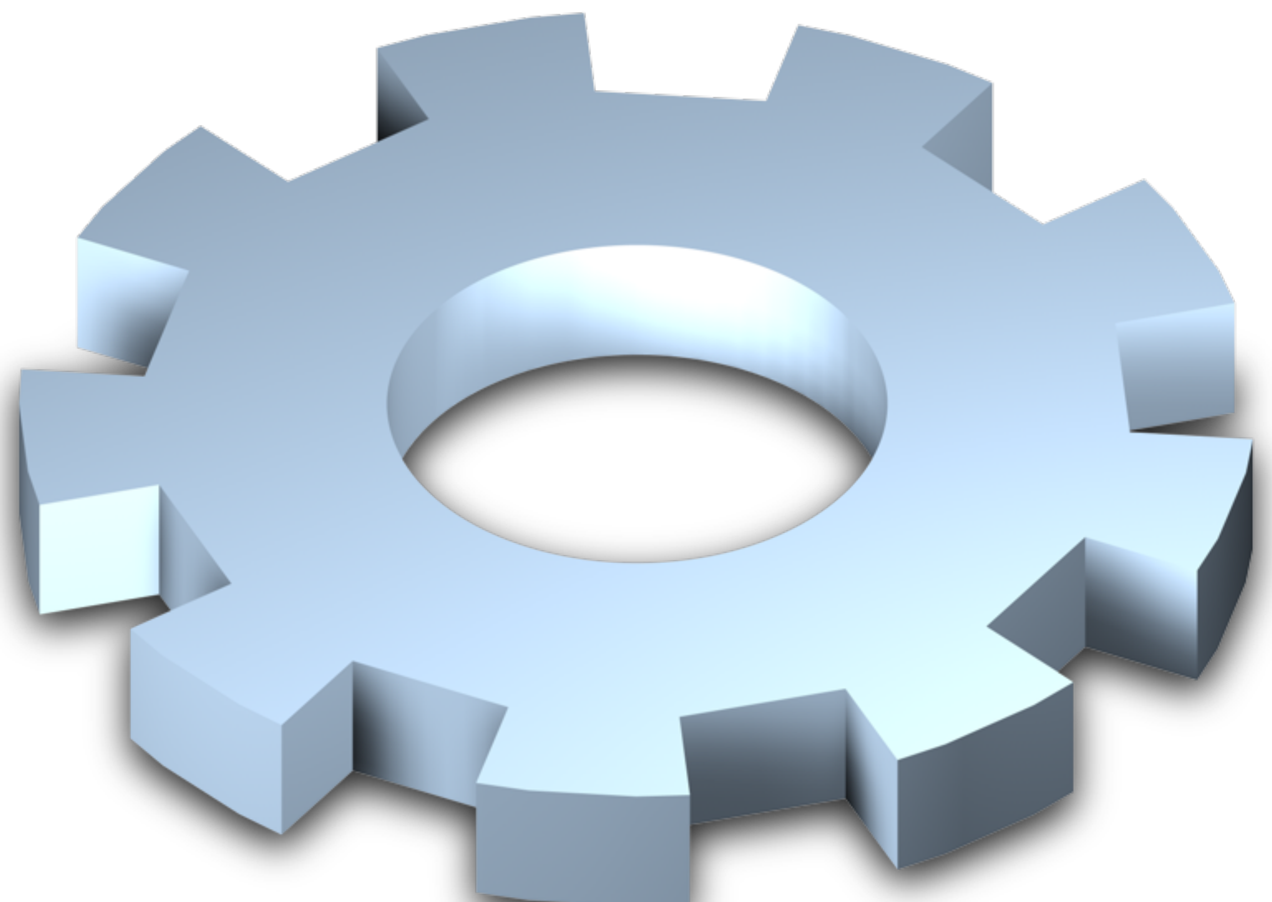
# Movimento “geral” de um corpo



**O corpo desloca-se como um todo, sem alterar a sua orientação no espaço**

# Translação

# Movimento “geral” de um corpo



**Há pelo menos um ponto do corpo que não se move (“ponto fixo”)**

**Rotação**

# Movimento "geral" de um corpo

**O eixo de rotação não tem de ser o mesmo durante todo o movimento...**

**Rotação**

# Movimento “geral” de um corpo

- Numa rotação pura, o eixo de rotação pode ser identificado, em cada instante, pelo conjunto de pontos que, nesse instante, não se movem
- Podemos então tentar analisar um movimento geral de um corpo como uma “soma”, em cada instante, de uma translação com uma rotação em torno de um eixo “instantâneo” de rotação

# Como descrever a translação?

- Só sabemos lidar com “pontos materiais”…
- Vamos analisar um corpo extenso como um conjunto de pontos materiais…
- Para já, não vamos restringir de modo algum o movimento dos pontos materiais
- Isto significa que o que vamos descobrir se aplica a qualquer corpo, mesmo que a sua forma se altere durante o movimento…

# Centro de massa

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{F}_i = m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

Para um conjunto de partículas:

$$\sum_i \vec{F}_i = m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} + m_3 \frac{d^2\vec{r}_3}{dt^2} + \cdots$$

Será que é possível escrever esta relação como

$$\vec{F}_{\text{total}} = M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad ?$$

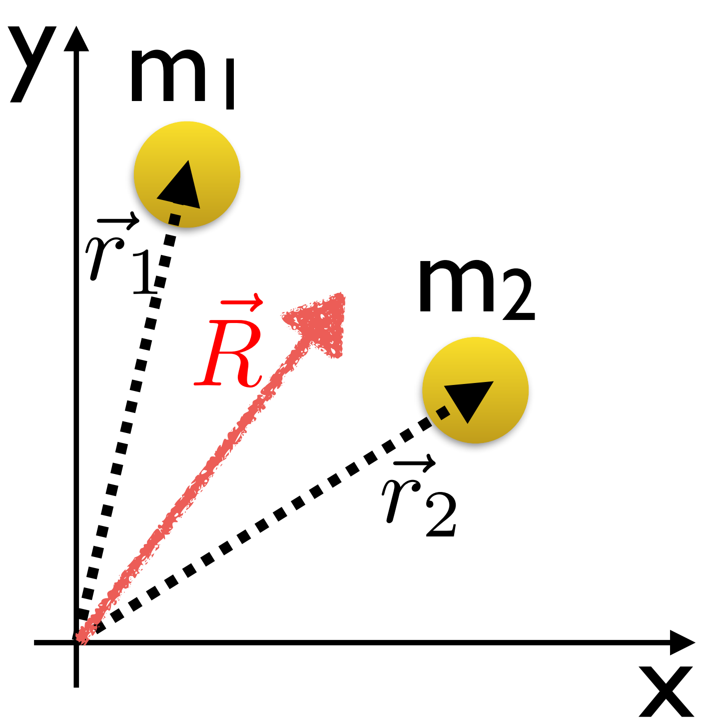
Sim, basta definir: $$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

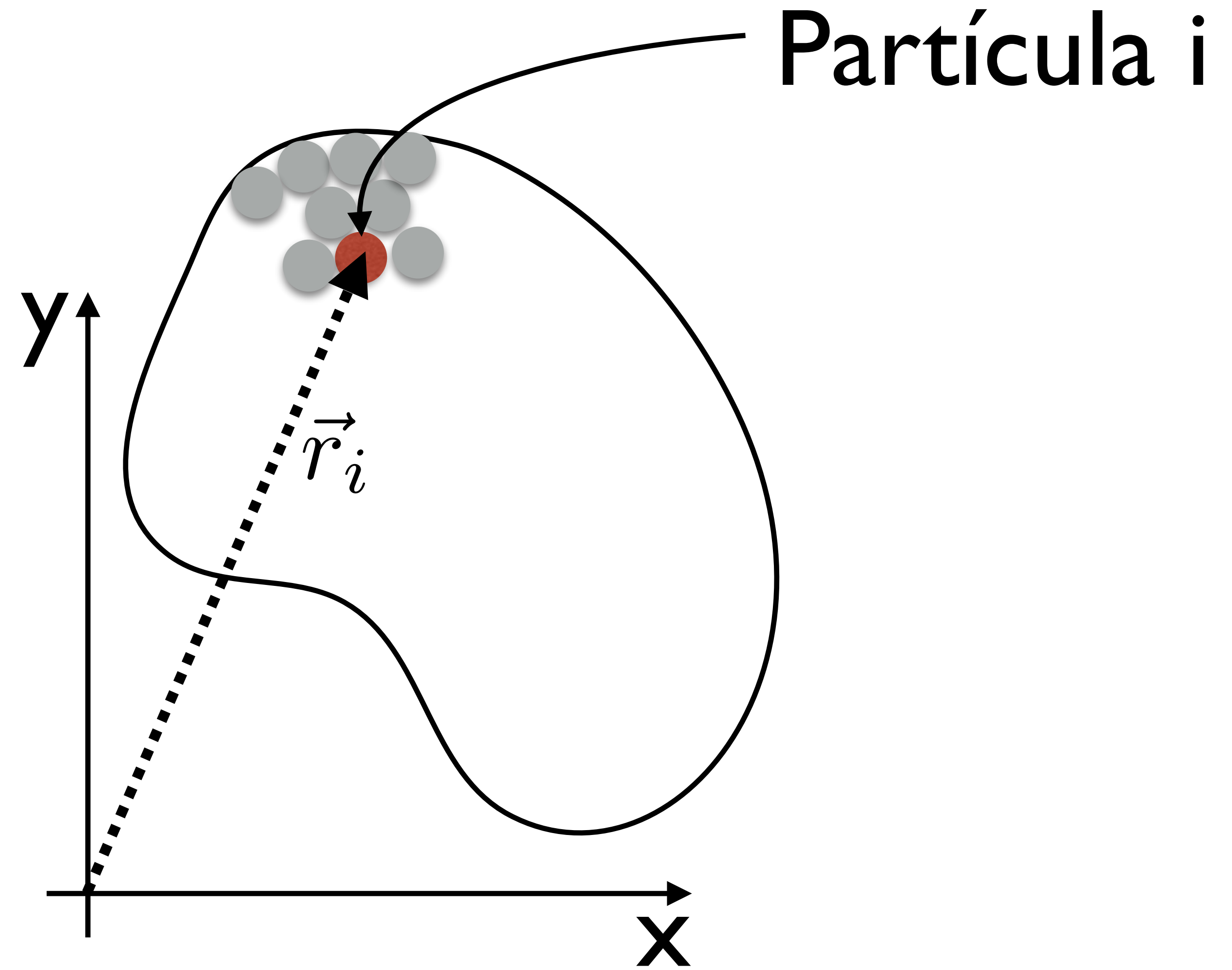
# Centro de massa

$$\boxed{\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}}$$

Vetor posição do **centro de massa** do sistema de partículas

$$M = \sum_i m_i$$



# Centro de massa

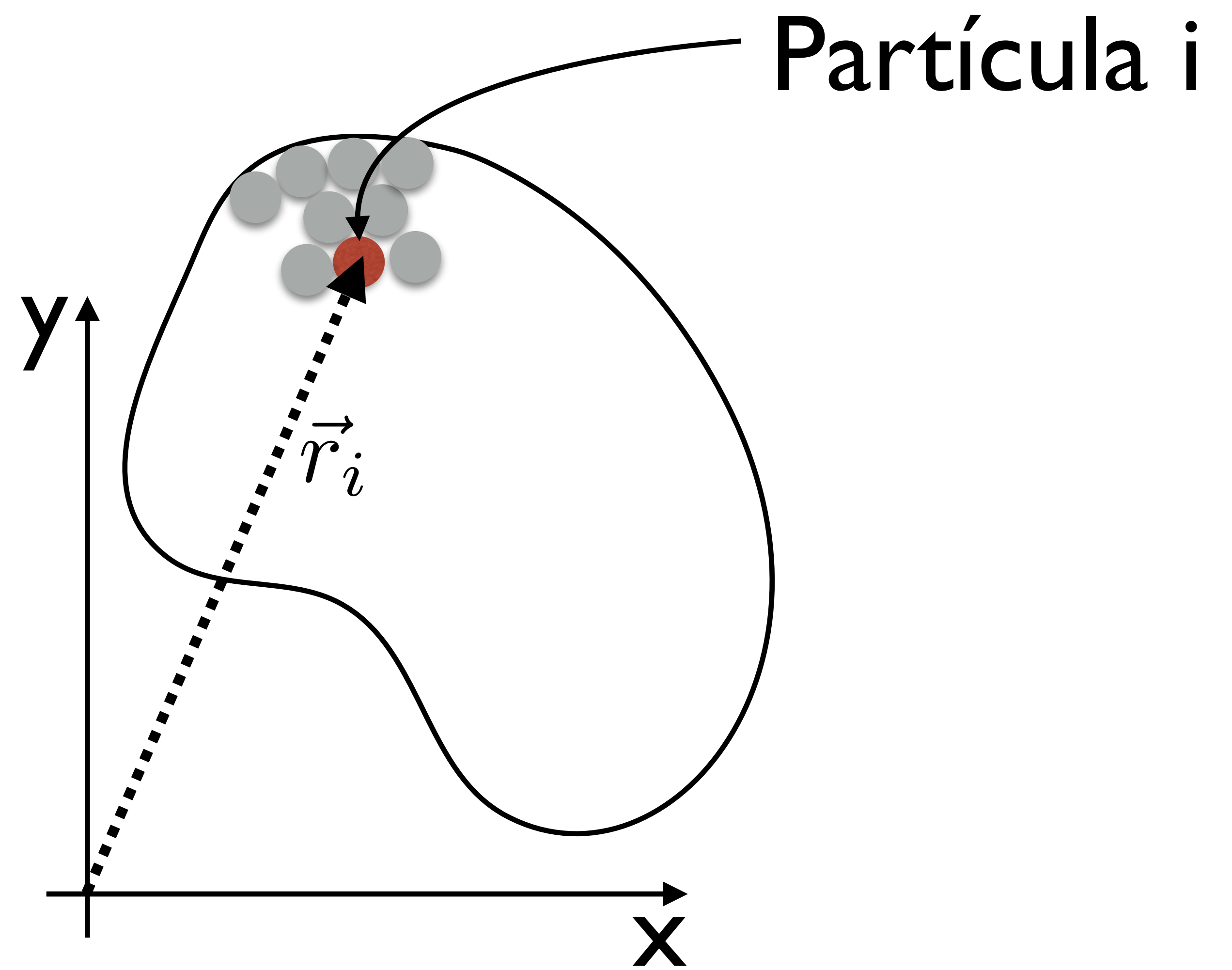
$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i x_i(\rho V_i)}{M} \rightarrow \frac{\int_V x\rho \, dV}{M}$$

Densidade do material

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \rightarrow \frac{\int_V y\rho \, dV}{M}$$

$$z_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \rightarrow \frac{\int_V z\rho \, dV}{M}$$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}}$$



# Dinâmica de um sistema de partículas

Encontrámos o centro de massa de um sistema procurando um vetor posição cuja segunda derivada fosse igual à resultante de todas as forças que atuam num sistema de partículas dividida pela massa do conjunto de partículas

$$\vec{F}_{\text{total}} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

$$\vec{F}_{\text{total}} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left( \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji} \right) = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \cancel{\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji}}$$

Forças externas

Forças entre as partículas

Força da partícula j sobre a partícula i

3ª Lei de Newton

# Dinâmica de um sistema de partículas

O centro de massa de um sistema de partículas de massa total *M* move-se tal como se moveria um ponto material com a mesma massa sujeito às mesmas forças externas

$$\sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{ext}} = M\,\vec{A}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{P}_{\mathrm{CM}}}{dt}$$

$$\vec{P}_{\mathrm{CM}} = \sum_i \vec{p}_i = M\vec{V}_{\mathrm{CM}}$$

…se a resultante das forças externas for nula, o momento linear do centro de massa mantém-se constante, i.e., o momento linear total do sistema mantém-se constante…

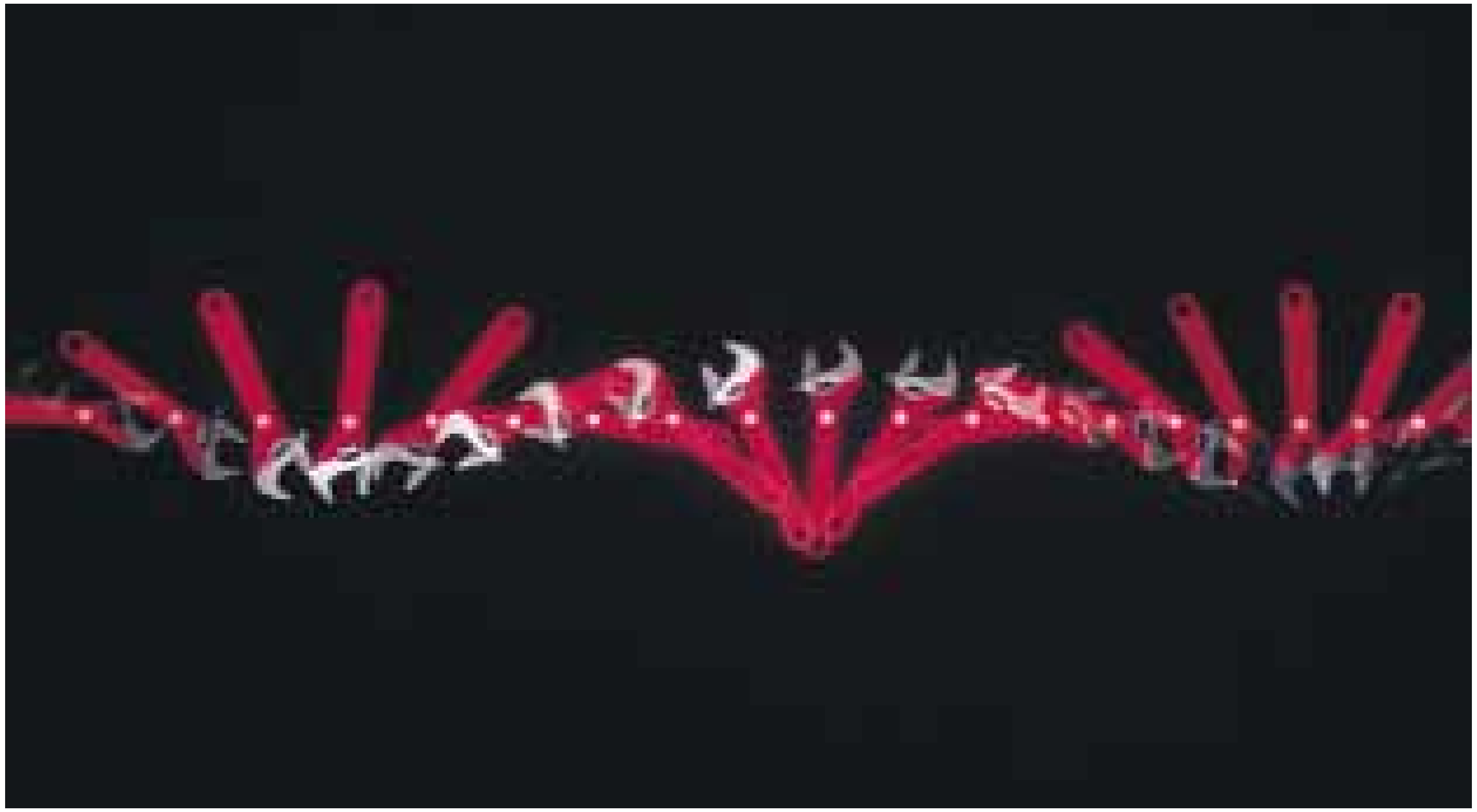
# Determinar experimentalmente o centro de massa


Encontrar o ponto de interseção das linhas verticais que passam por diferentes pontos de suspensão do objeto

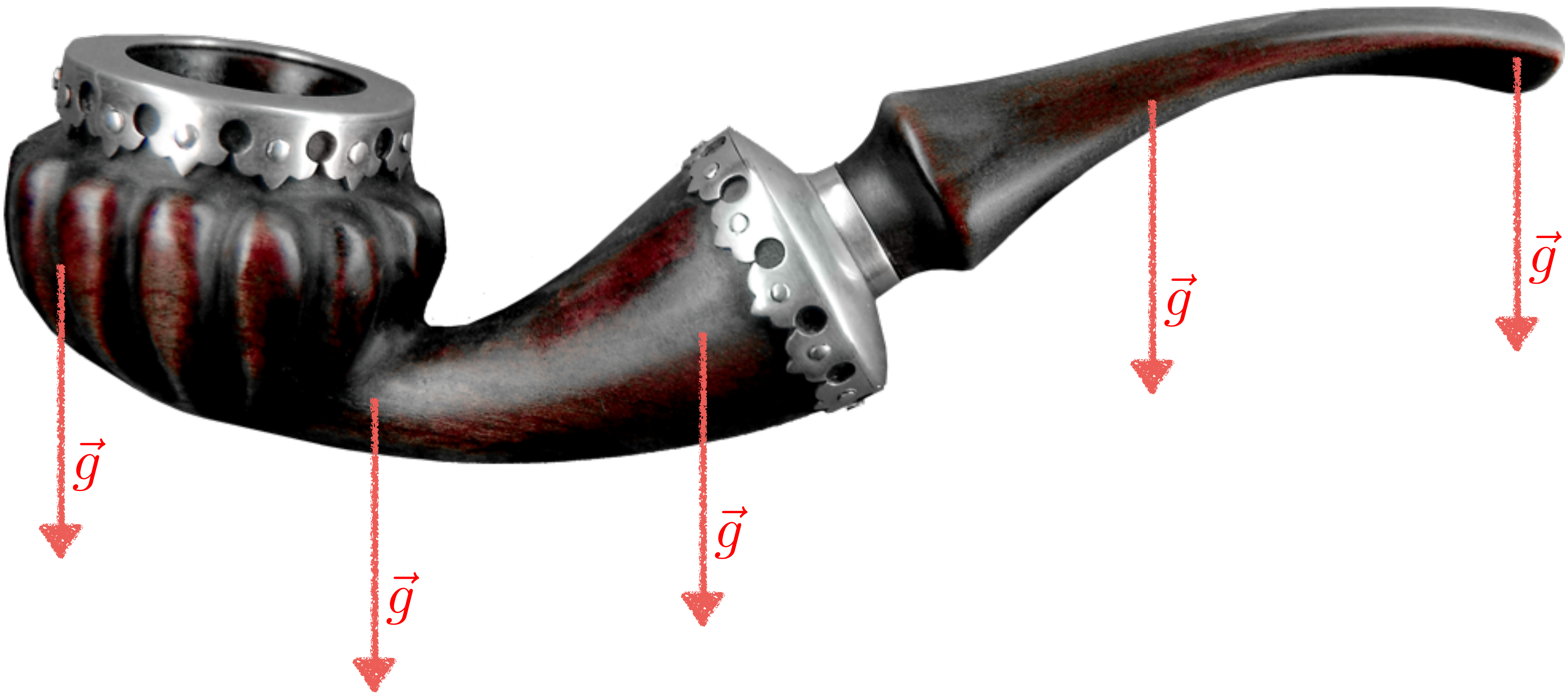
Na realidade, o que estamos a determinar é o centro de gravidade…

# Dinâmica de um sistema de partículas

O centro de massa de um sistema de partículas de massa total $M$ move-se tal como se moveria um ponto material com a mesma massa sujeito às mesmas forças externas



# Centro de gravidade



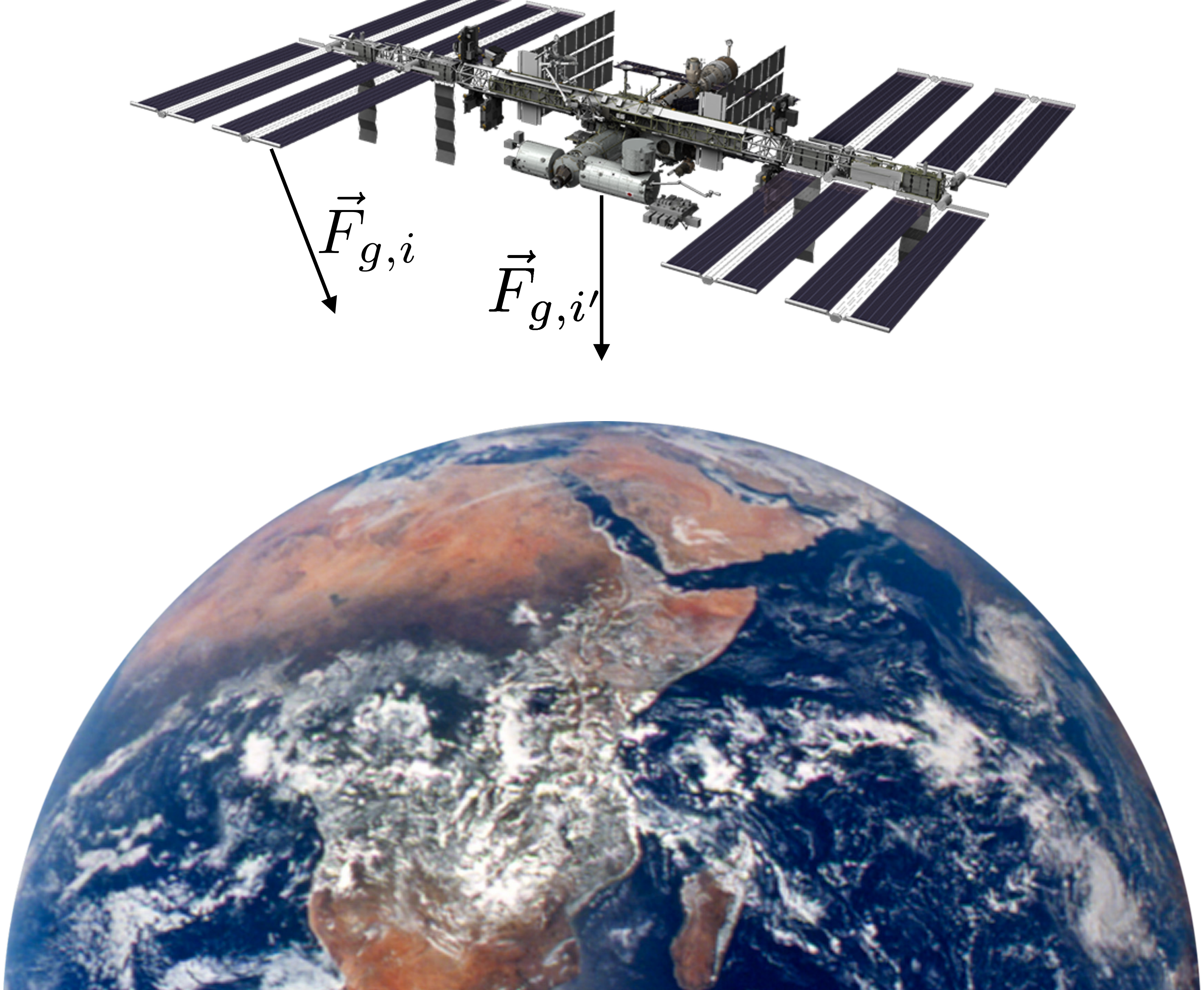

Podemos definir um ponto, o **centro de gravidade**, onde podemos "colocar" uma força gravítica de valor *M*g cujo efeito é o mesmo da soma de todas estas forças gravíticas

# Centro de gravidade

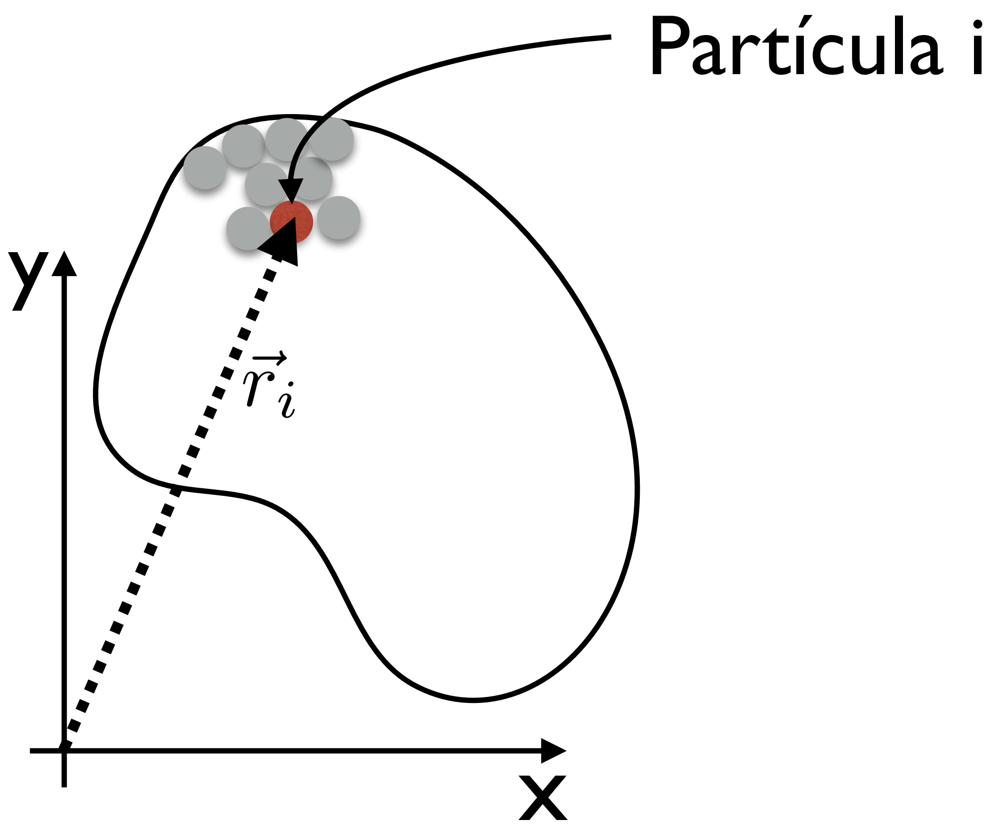
Se a aceleração da gravidade for idêntica em todos os pontos do corpo, o centro de gravidade <u>coincide</u> com o centro de massa do corpo

Quando o corpo é muito extenso, o centro de gravidade pode não coincidir com o centro de massa…

# Centro de gravidade



# Corpo rígido

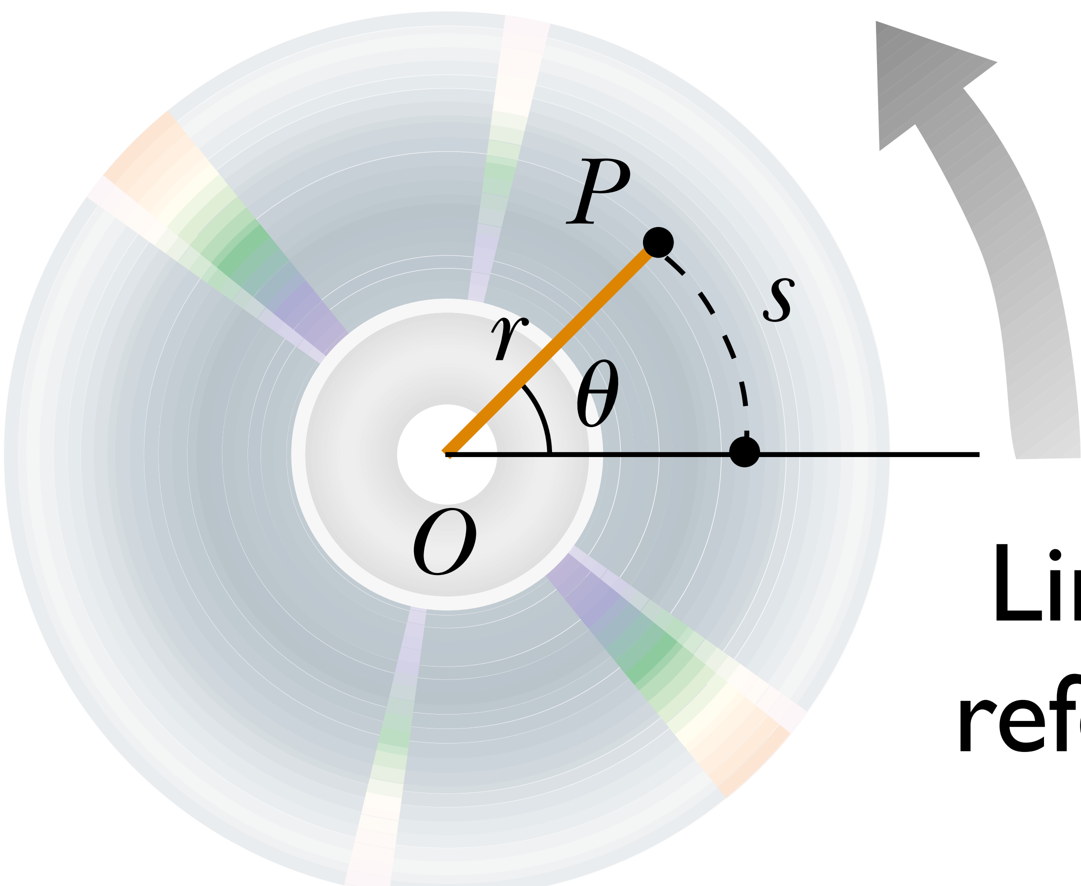



Num **corpo rígido**, as posições relativas das partículas constituintes não se alteram

Teorema de Chasles: o movimento mais geral de um corpo rígido é uma translação combinada com uma rotação

Translação do corpo ☞ Movimento do centro de massa

# Coordenadas angulares




Linha de referência

$$s = r\theta$$

$$\frac{d}{dt}s = r\frac{d}{dt}\theta$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ Velocidade angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$ Aceleração angular

Se α for constante:

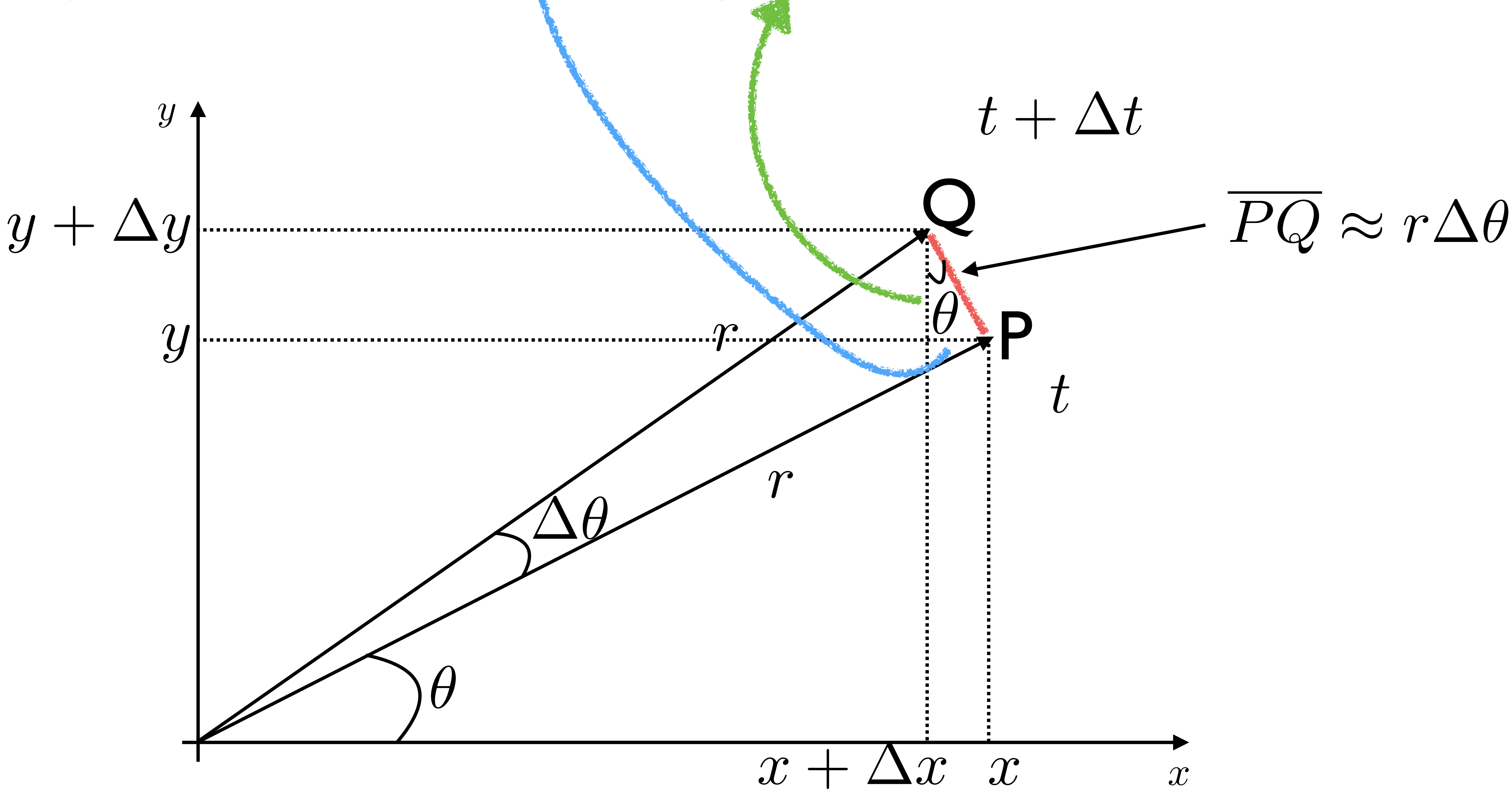
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

# Partícula que "roda"

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x = -r\Delta\theta\sin(\theta) = -y\Delta\theta \\ \Delta y = r\Delta\theta\cos(\theta) \quad = x\Delta\theta \end{cases}$$



# Velocidade angular

$$\begin{cases} \Delta x = -y\Delta\theta \\ \Delta y = x\Delta\theta \end{cases} \times \frac{1}{\Delta t} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} v_x = -y\omega \\ v_y = x\omega \end{cases} \qquad \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Direção do eixo de rotação e sentido dado pela regra da mão direita

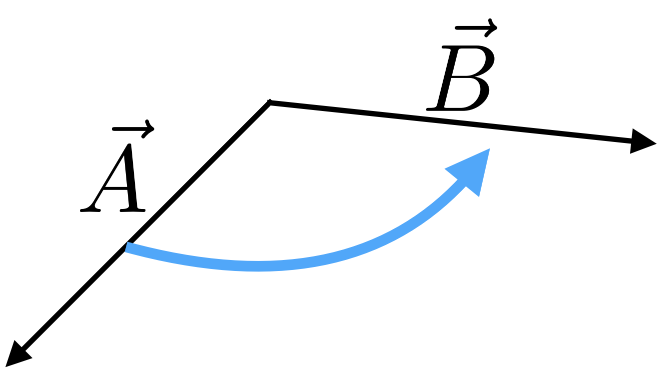
Direção perpendicular aos vetores A e B

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)\hat{k} =$$

$$= (\boxed{A_yB_z} - \boxed{A_zB_y})\hat{x} + (\boxed{A_zB_x} - \boxed{A_xB_z})\hat{y} + (\boxed{A_xB_y} - \boxed{A_yB_x})\hat{z}$$

# Regra da mão direita

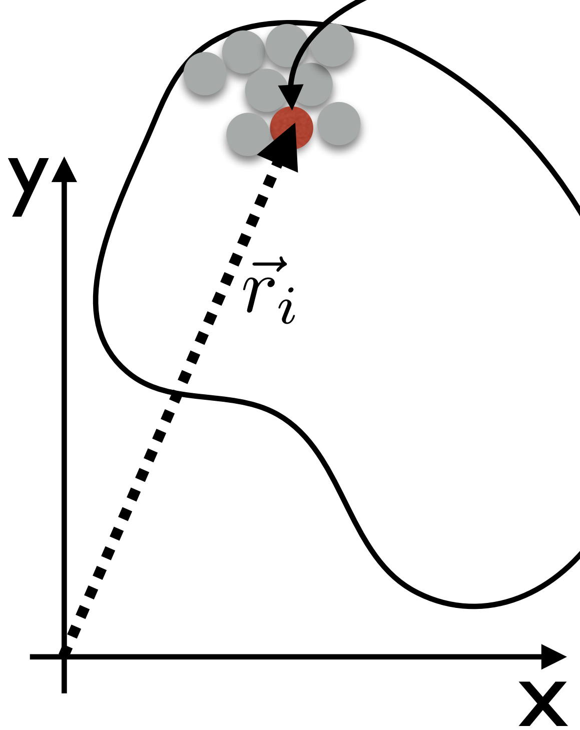
$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$




O polegar indica o sentido do vetor produto


Colocar todos os dedos da MÃO DIREITA no sentido de rotação do primeiro vetor para o segundo vetor do produto (a ordem é importante!)

# Energia cinética




$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Todas as partículas do corpo têm **a mesma velocidade angular**, embora **não tenham a mesma velocidade linear**

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2$$

Estamos a "esquecer" o movimento de translação…

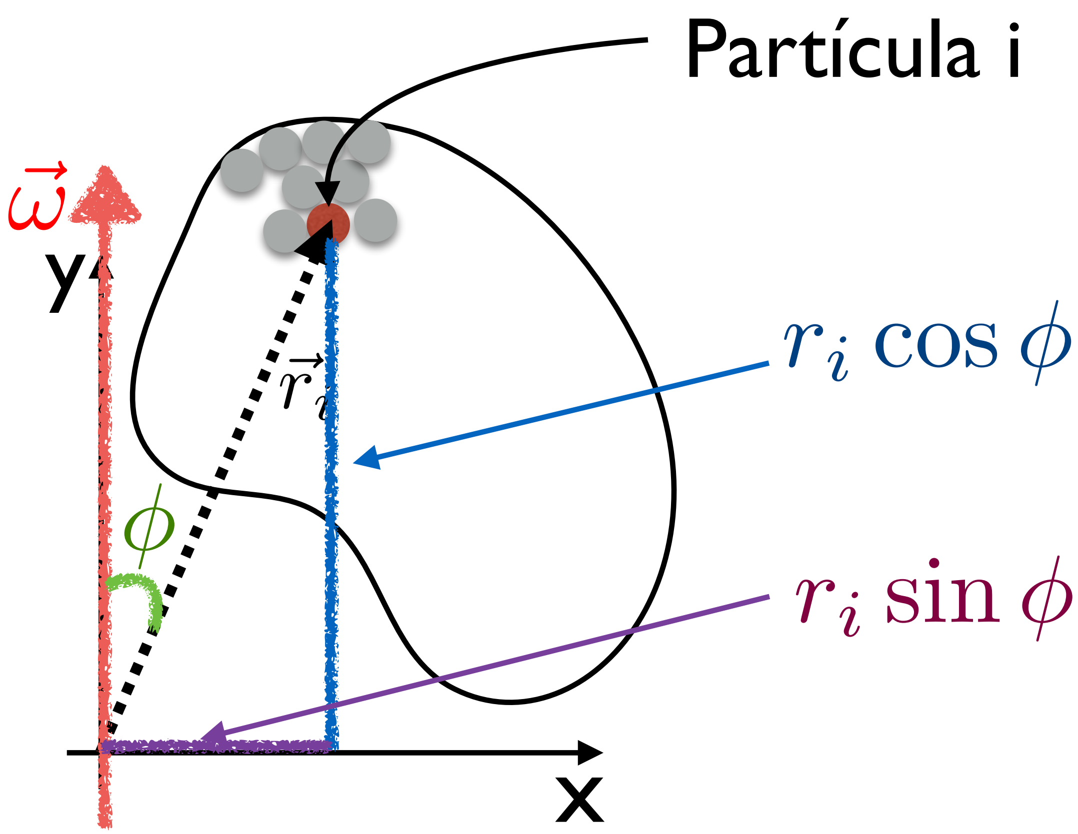
# Energia cinética

$$
\begin{aligned}
(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 &= (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\
&= \vec{r}_i \cdot ([\vec{\omega} \times \vec{r}_i] \times \vec{\omega}) = -\vec{r}_i \cdot (\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]) \\
&= -\vec{r}_i \cdot ([\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i]\, \vec{\omega} - [\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}]\, \vec{r}_i) \\
&= \omega^2 r_i^2 - [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i]^2 \\
&= \omega^2 \left( r_i^2 - r_i^2 (\cos\phi)^2 \right)
\end{aligned}
$$

Ângulo entre $r_i$ e $\omega$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \\
&\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) \vec{B} - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) \vec{C}
\end{aligned}
}
$$

# Energia cinética




$$r_i^2 - r_i^2(\cos\phi)^2 =$$
$$= r_i^2\left(1 - (\cos\phi)^2\right) =$$
$$= r_i^2\,(\sin\phi)^2 = d_i^2$$

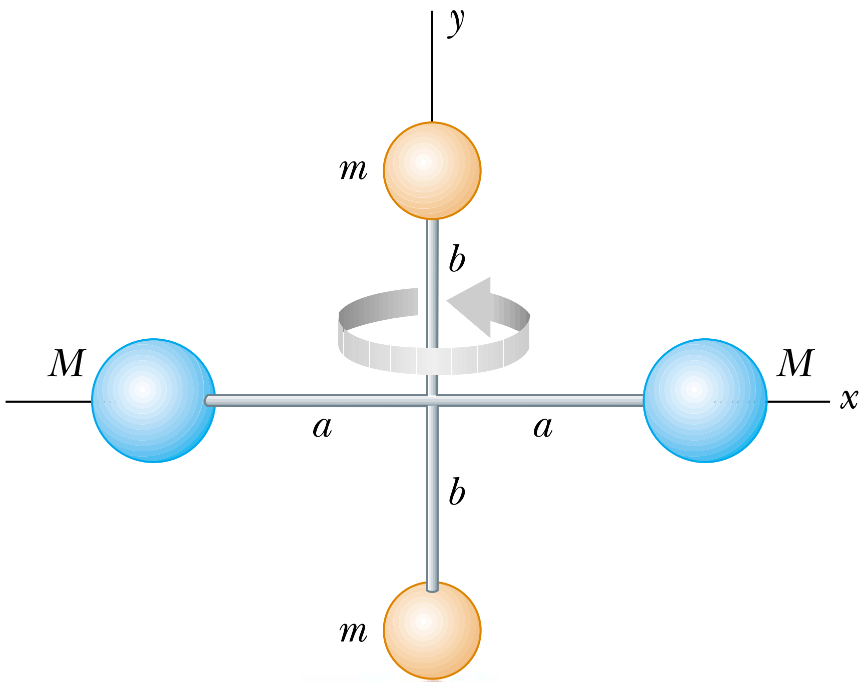
Distância da partícula i ao eixo de rotação

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i d_i^2\right)\omega^2$$

Momento de inércia $I = \sum_i m_i d_i^2$

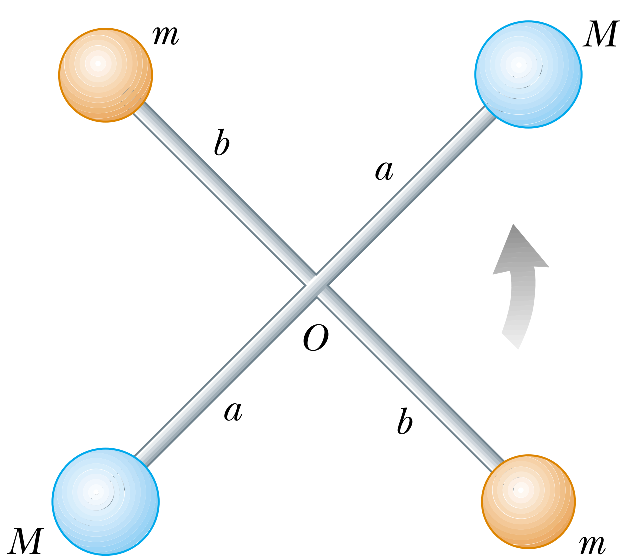
$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

# Momento de inércia




$$E_c = 2 \times \frac{1}{2} M (a\omega)^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = 2Ma^2$$




$$E_c = 2 \times \frac{1}{2} M (a\omega)^2 + 2 \times \frac{1}{2} m (b\omega)^2$$
$$= \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = 2Ma^2 + 2mb^2$$

**Momento de inércia** $I = \sum_i m_i d_i^2$

Unidades: massa×área

# Momento de inércia

**Momento de inércia** $I = \sum_i m_i d_i^2$

Para uma distribuição contínua de massa:

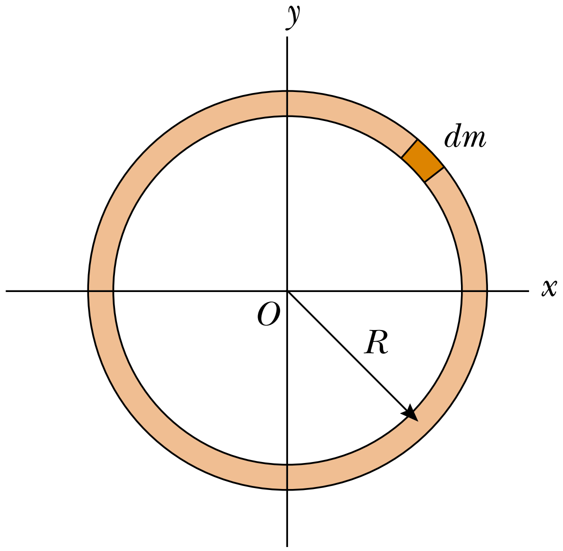
$$I = \int_{\text{Volume do corpo}} d^2 dm$$

$$= \int_{\text{Volume...}} d^2 \rho dV$$

Massa volúmica (densidade) do material

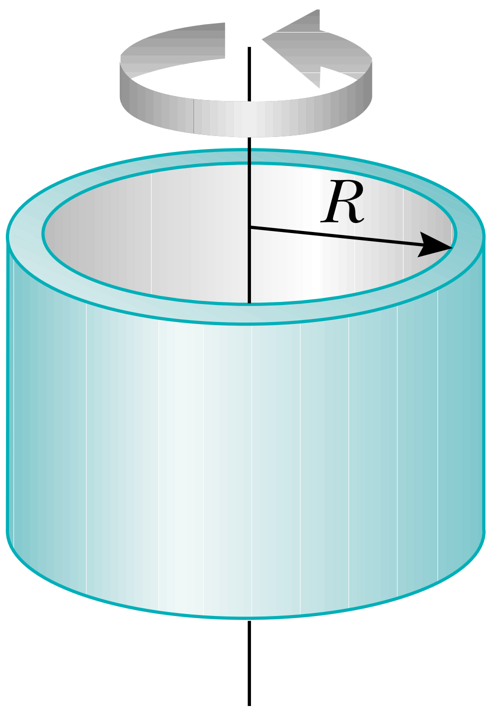
# Momento de inércia

Anel a rodar em torno do seu eixo:




$$
\begin{aligned}
I &= \int R^2 dm \\
&= R^2 \int dm \\
&= MR^2
\end{aligned}
$$

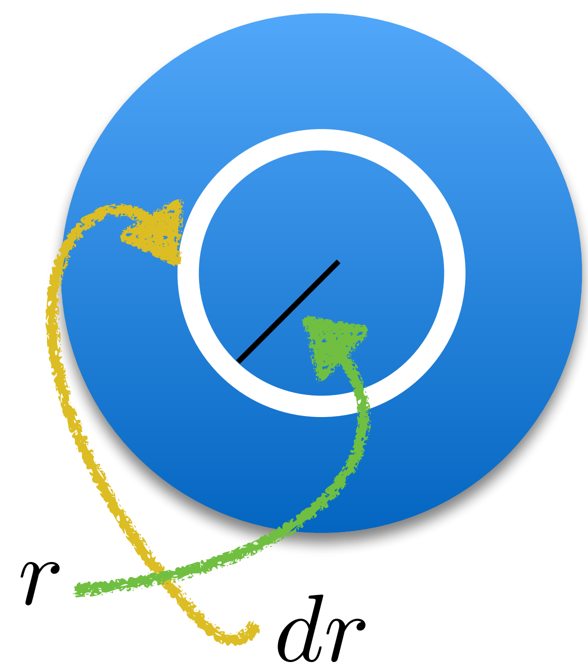
Casca cilíndrica a rodar em torno do seu eixo:




$$I = MR^2$$

# Momento de inércia

Disco a rodar em torno do seu eixo:




$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

Massa por unidade de área

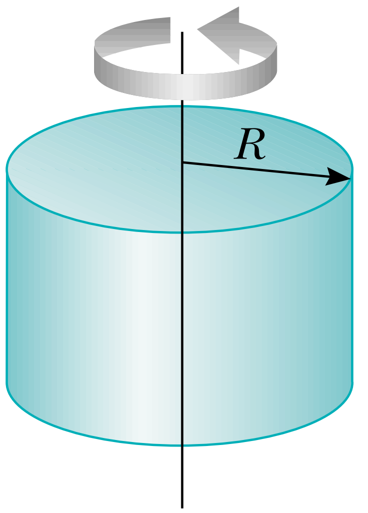
$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr$$

$$= 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4}$$

$$= \sigma \left(\pi R^2\right) \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} M R^2$$

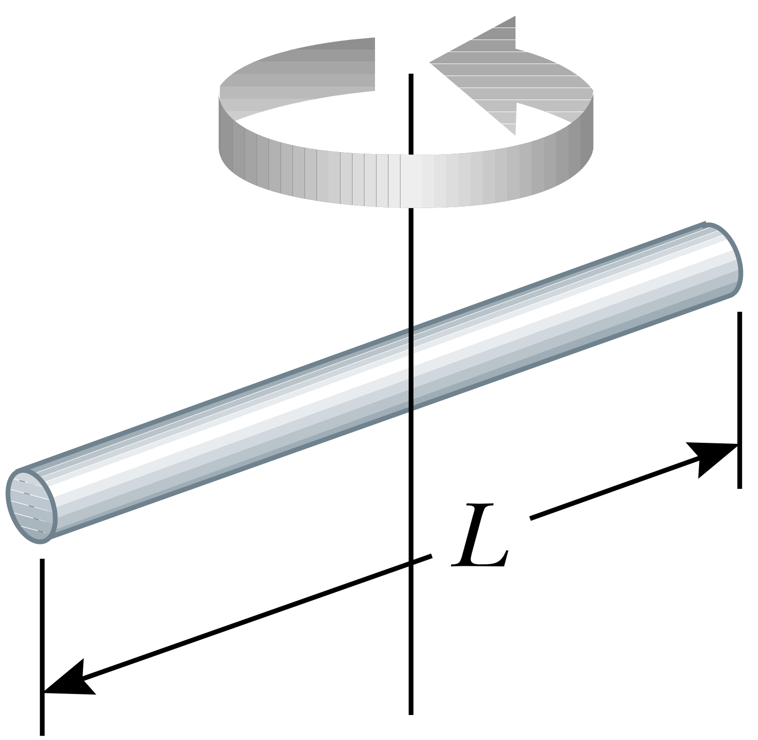
# Momento de inércia

Cilindro maciço a rodar em torno do seu eixo:




$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

Barra maciça a rodar em torno de um eixo perpendicular:




Massa por unidade de comprimento

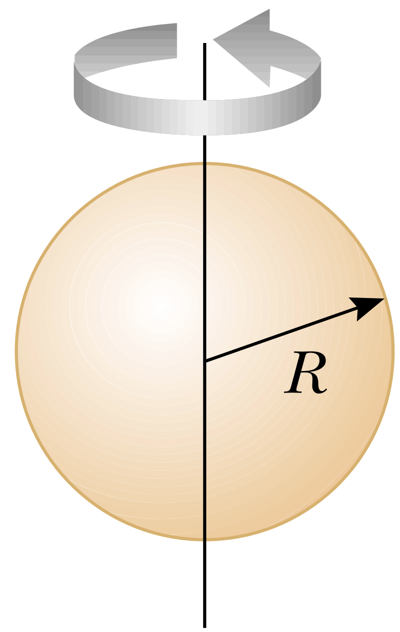
$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx$$

$$= \lambda \frac{L^3}{12}$$

$$= \frac{1}{12} M L^2$$

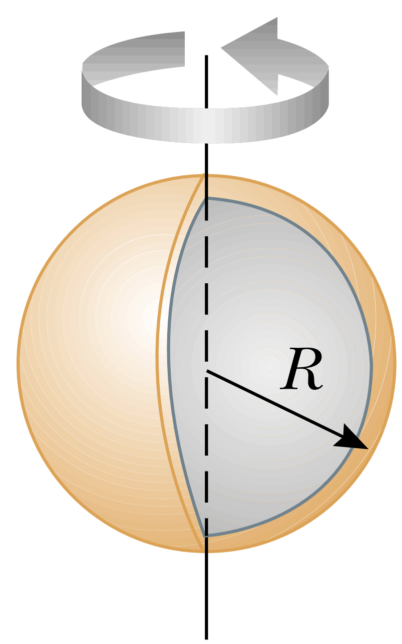
# Momento de inércia

Esfera maciça a rodar em torno do seu eixo:




$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

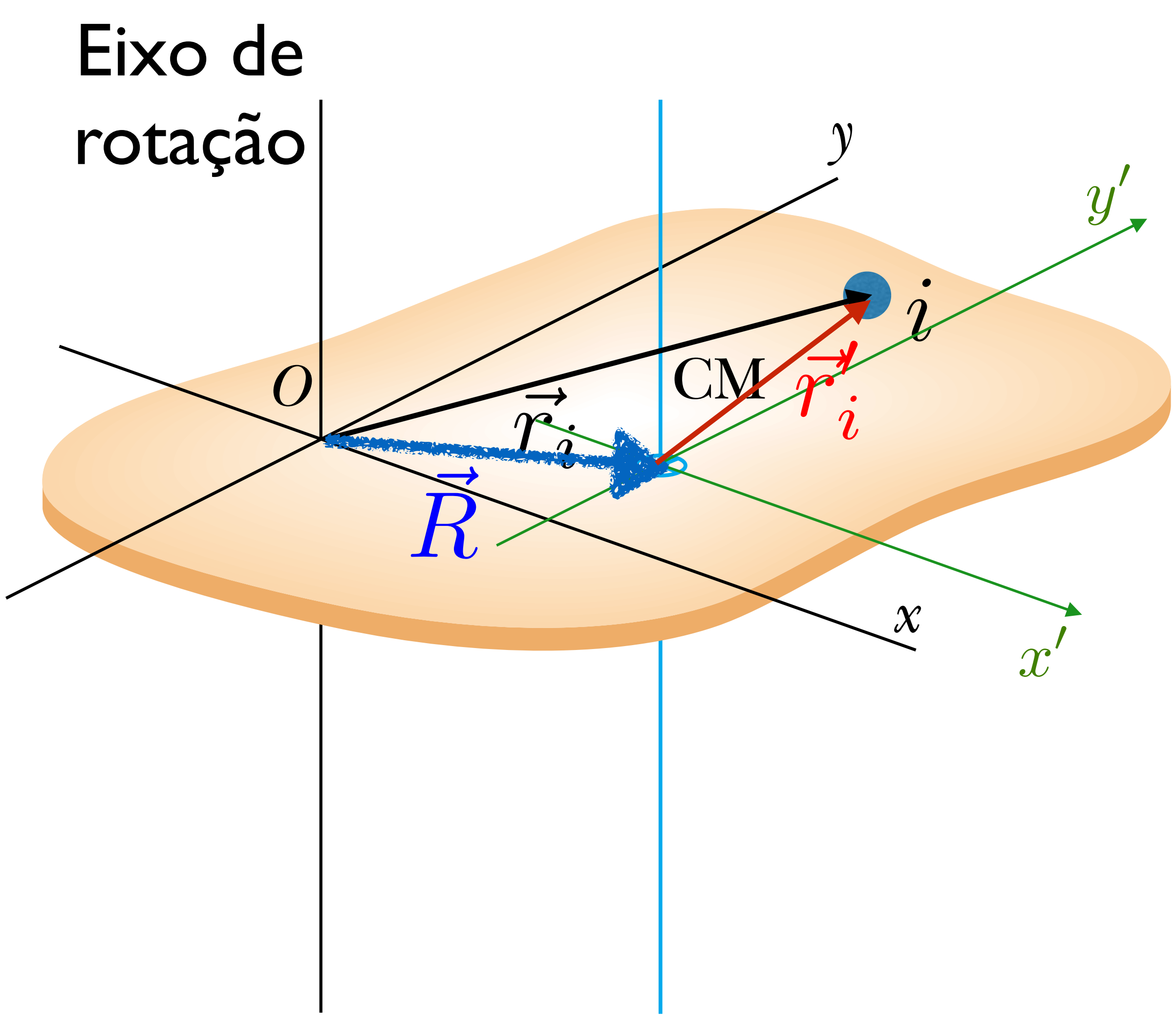
Esfera oca a rodar em torno do seu eixo:




$$I = \frac{2}{3} M R^2$$

# Momento de inércia

Todos estes momentos de inércia foram calculados assumindo que o eixo de rotação passava pelo centro de massa. E se não passar?




$$I_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i (r'_i)^2$$

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{O}} &= \sum_i m_i (r_i)^2 \\ &= \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \cdot (\vec{R} + \vec{r}'_i) \\ &= \sum_i m_i \left( R^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{r}'_i + {r'}_i^2 \right) \end{aligned}$$

# Momento de inércia

$$I_{\mathrm{O}} = \sum_i m_i \left( R^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{r}'_i + {r'}_i^2 \right)$$

$$= MR^2 + 2\vec{R} \cdot \sum_i m_i \vec{r}'_i + I_{\mathrm{CM}}$$

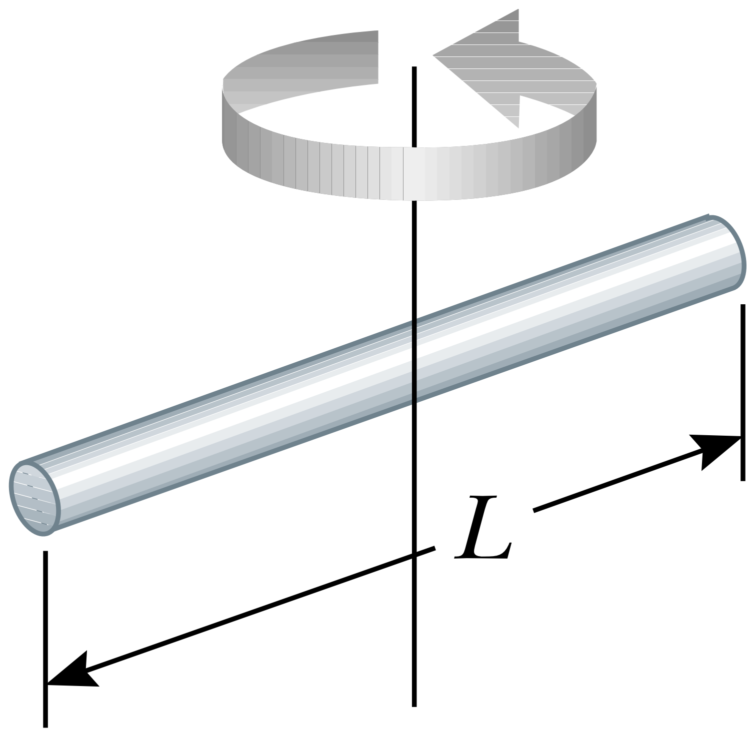
R é a distância entre os dois eixos

É zero porque é a posição do CM… no referencial do CM!

$$\boxed{I_{\mathrm{O}} = I_{\mathrm{CM}} + MR^2}$$

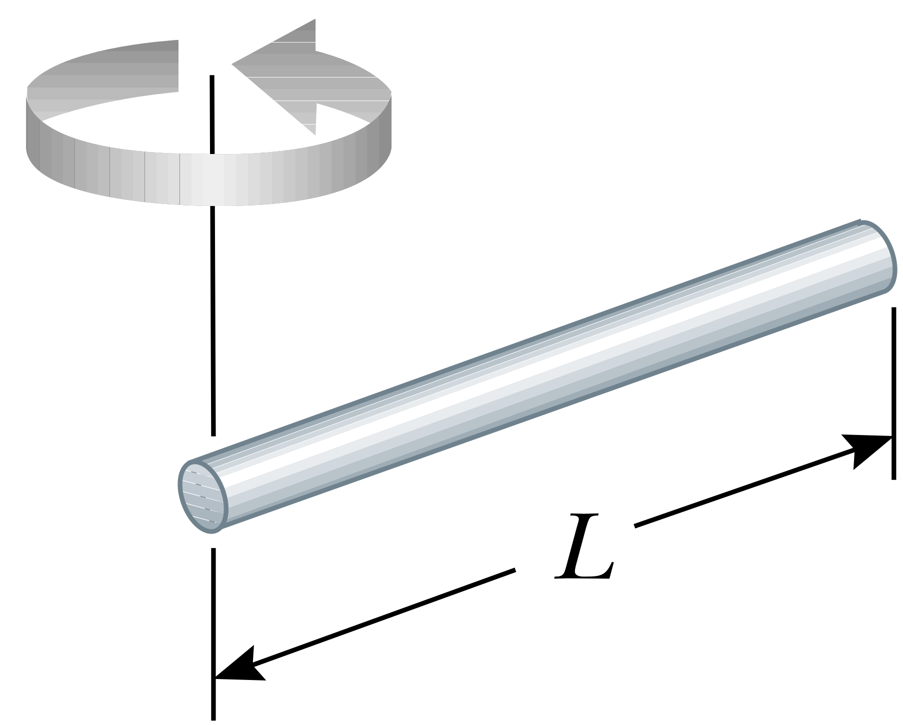
Teorema de Steiner
(ou teorema dos eixos paralelos)

# Momento de inércia

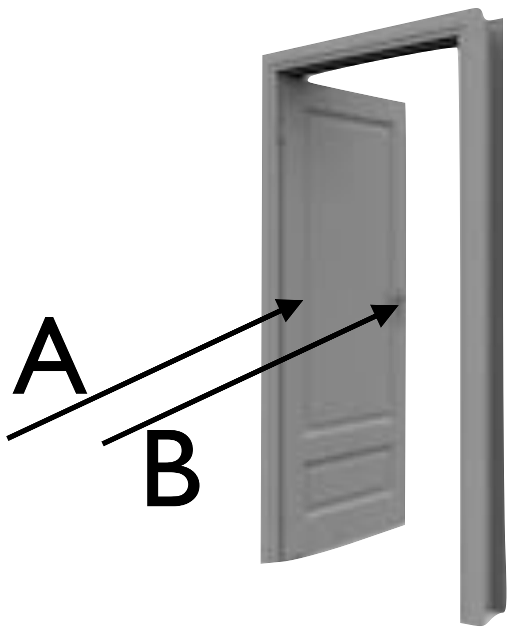



$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{12} M L^2$$

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{extremo}} &= I_{\mathrm{CM}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} M L^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} M L^2 \end{aligned}$$



# Momento de uma força




Em que ponto devemos apoiar a mão para abrir a porta com menor esforço? **B**

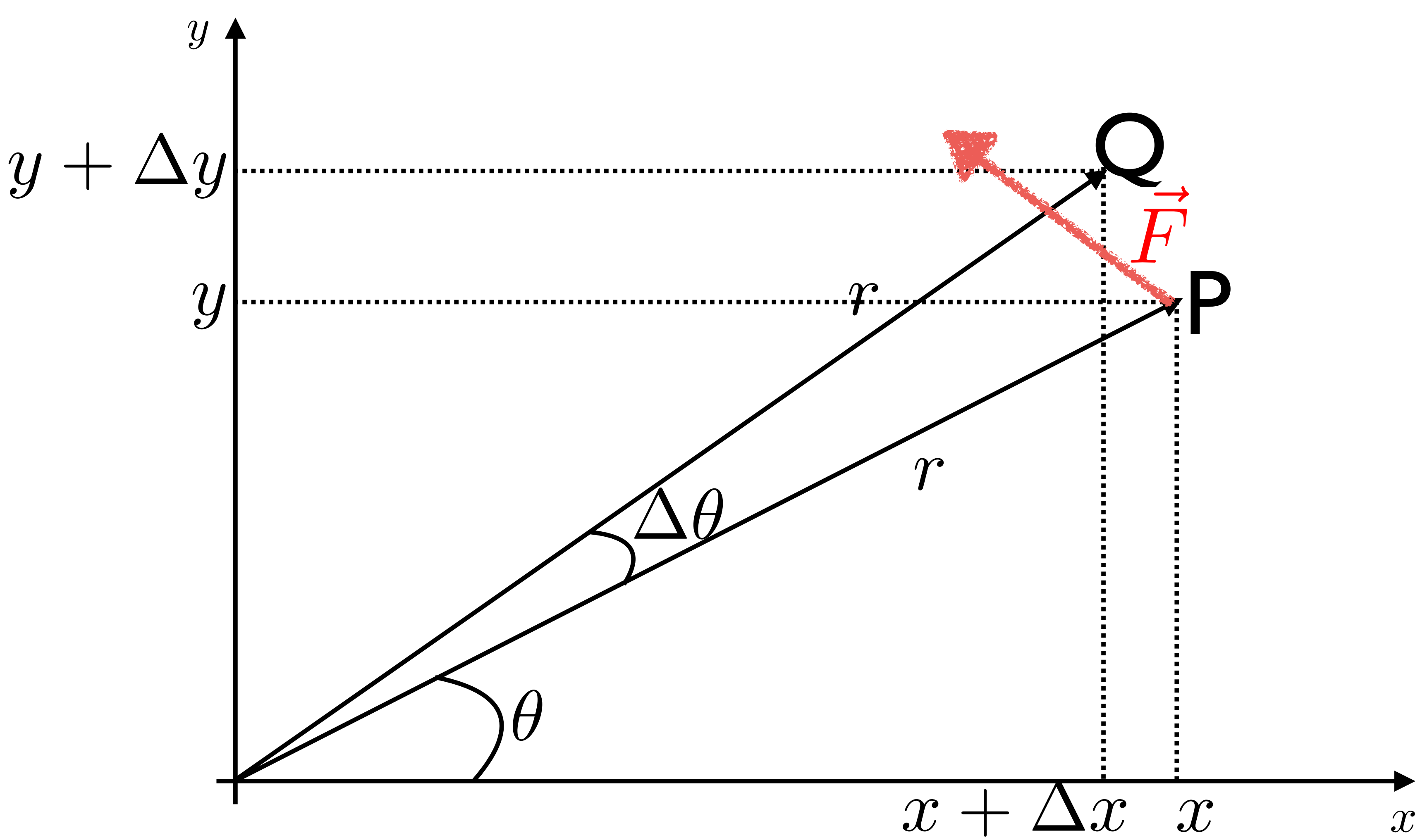
Como pode uma criança "levantar" um adulto sentado no outro lado do baloiço?

Quando estudamos a estática/dinâmica de um corpo que já não é possível considerar um ponto material, o **ponto de aplicação da força** tem de ser considerado

# Momento de uma força

$$dW = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y = -yF_x \Delta\theta + xF_y \Delta\theta = \tau_z \Delta\theta$$

$$\begin{cases} \Delta x = -y\Delta\theta \\ \Delta y = x\Delta\theta \end{cases}$$

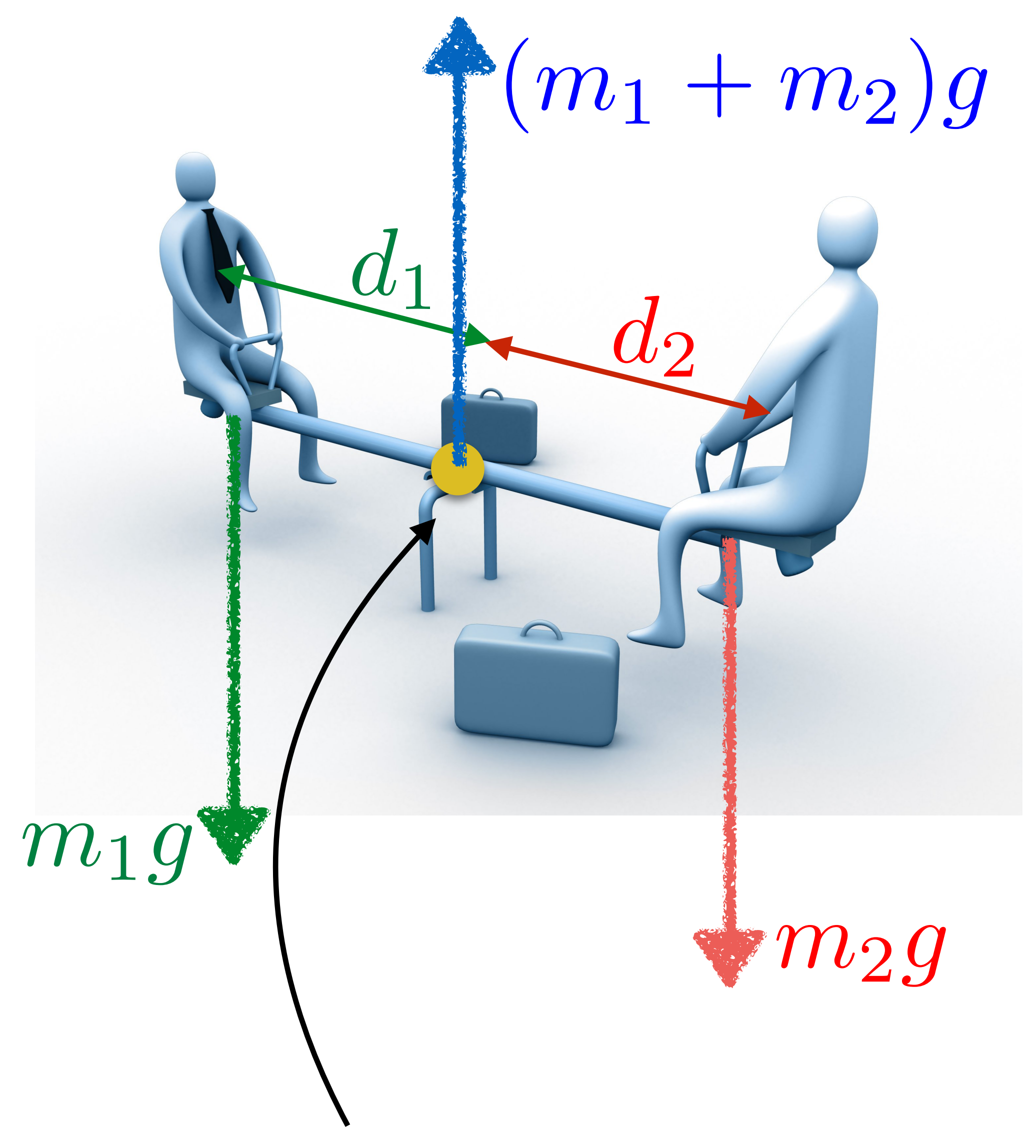



Momento da força F em relação à origem

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

(torque)

# Momento de uma força




Ponto em relação ao qual
vamos calcular os torques

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot \left|\vec{F}\right| \sin\left(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}\right)$$

$$b = |\vec{r}| \sin\left(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}\right)$$

**Braço** da força: distância da linha de ação da força ao ponto em relação ao qual se calcula o torque

$$m_1 g d_1 - m_2 g d_2 + 0 = 0$$

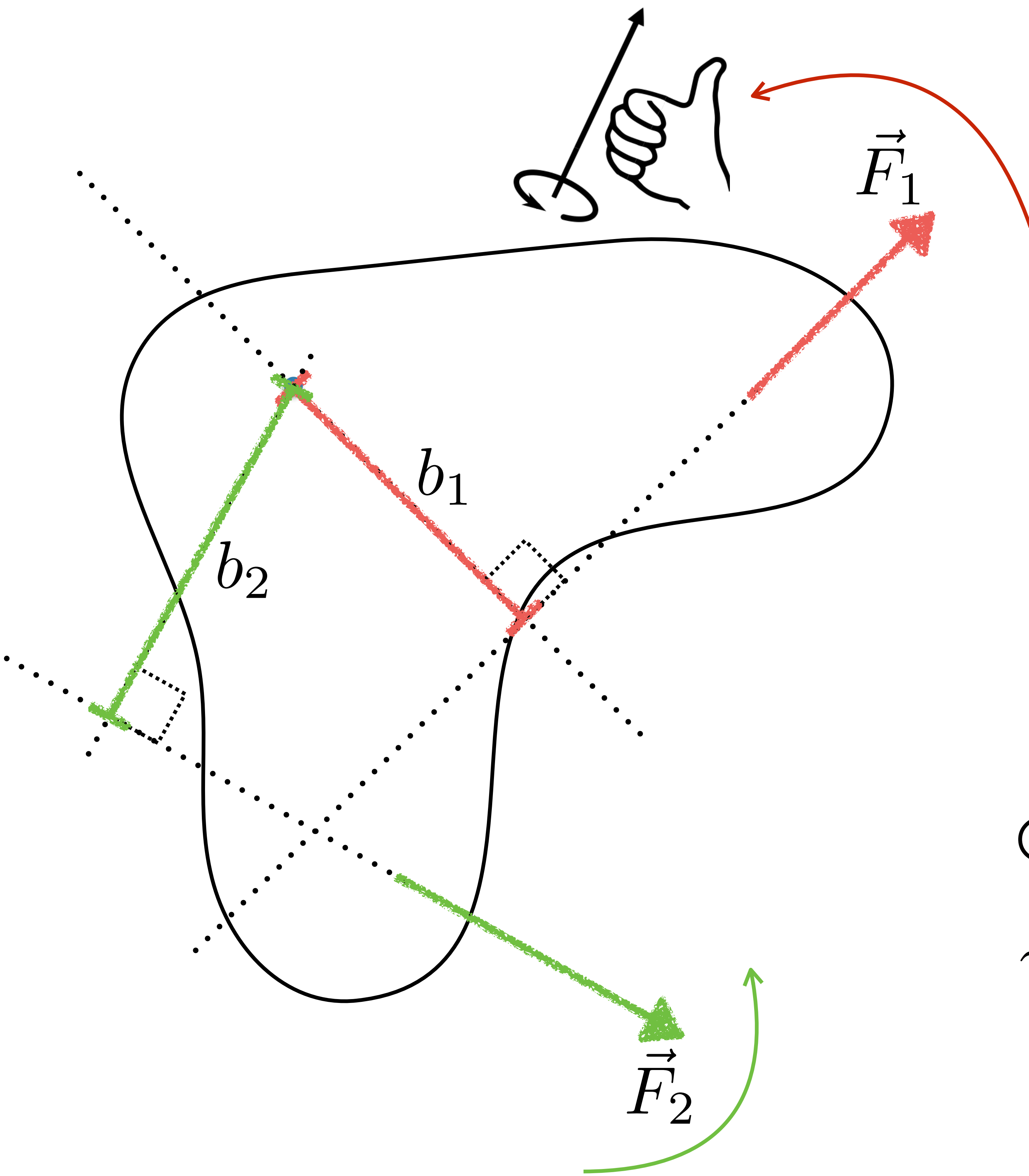
$\odot$ $\otimes$

Direção perpendicular ao plano do écran, sentido para "cima"

Direção perpendicular ao plano do écran, sentido para "baixo"

$$\boxed{m_1 d_1 = m_2 d_2}$$

# Momento de uma força




$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot \left|\vec{F}\right| \sin\left(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}\right)$$

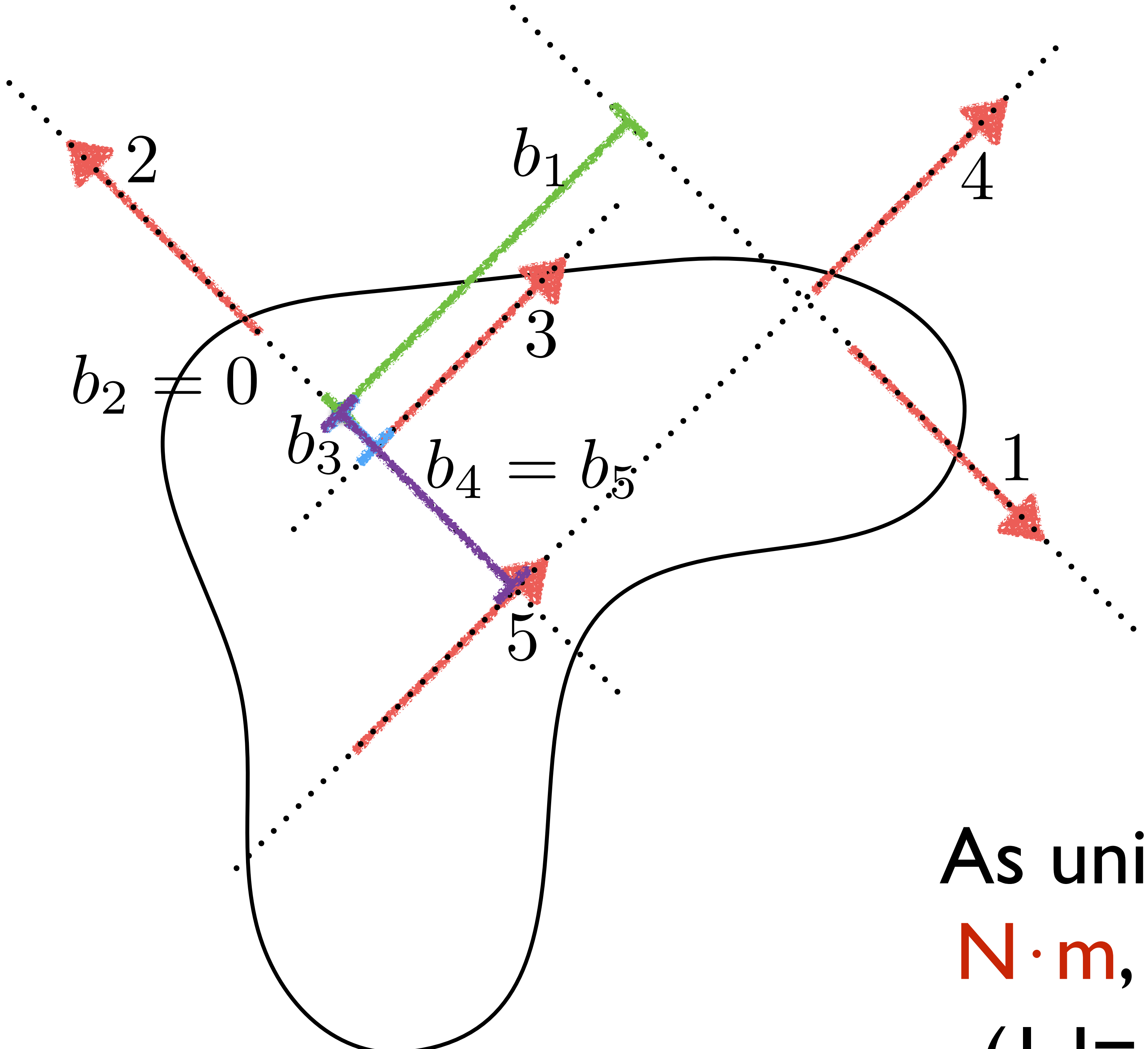
$$b = |\vec{r}| \sin\left(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}\right)$$

$$|\vec{\tau}| = \left|\vec{F}\right| \cdot b$$

$\odot \, \hat{z}$

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \underbrace{\left|\vec{F}_1\right| b_1 \, \hat{z}}_{\odot} + \underbrace{\left|\vec{F}_2\right| b_2 \, \hat{z}}_{\odot}$$

# Momento de uma força




Em qual destes pontos de aplicação a força "causa" maior torque?

$$1 > (4 = 5) > 3 > 2$$

As unidades SI do torque são N·m, tal como as da energia (1 J=1 N·m), mas o torque NÃO é uma energia

# Momento de uma força

- O momento de inércia é **SEMPRE** definido em relação a um **eixo** (o eixo de rotação…) - o seu valor não é "universal", depende do eixo!
- O momento de uma força é **SEMPRE** definido em relação a um **ponto** - o seu valor depende desse ponto!
- **Não faz qualquer sentido falar destas grandezas sem indicar o eixo/ponto...**

# Momento resultante

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \vec{F}_{ji} \right)$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}$$

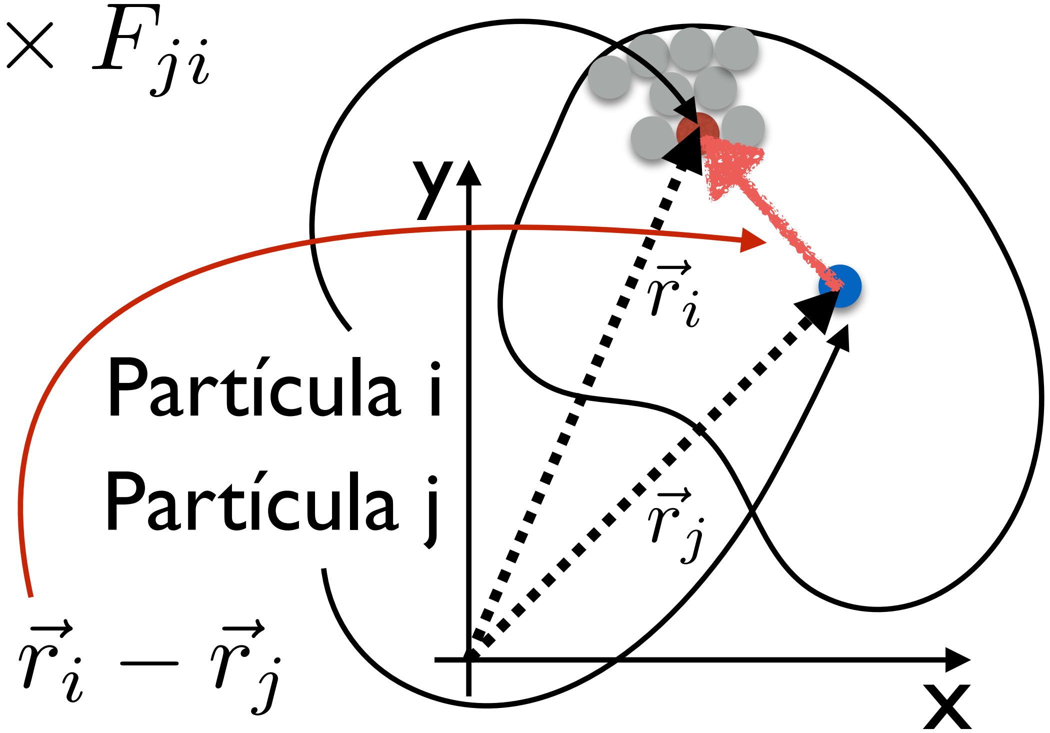
$$\boxed{\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}}$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\text{pares } ij} \left( \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} \right)$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\text{pares } ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji}$$

Esta parcela é nula se

$$\vec{r}_{ij} \parallel \vec{F}_{ji}$$




$$\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

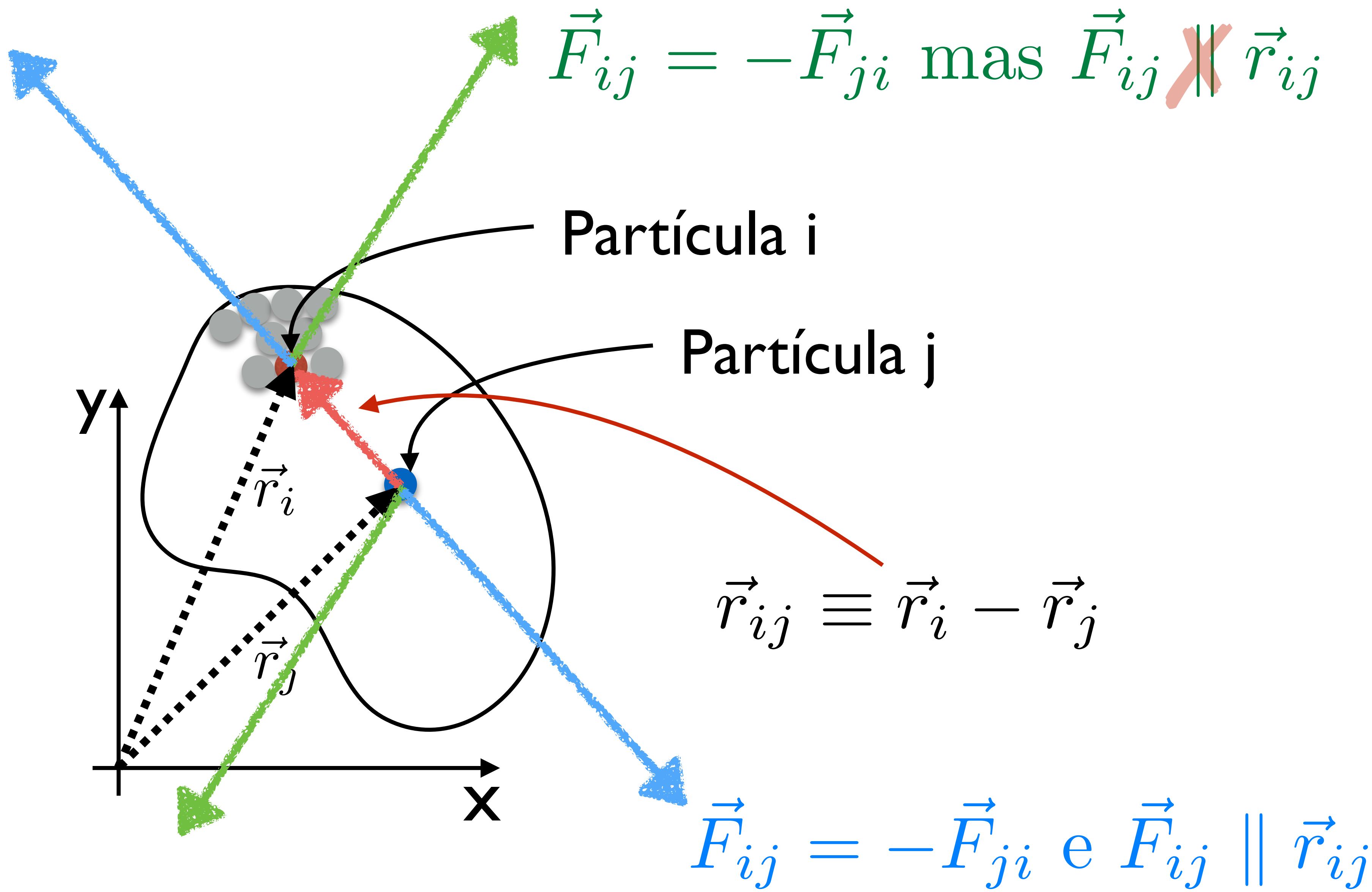
# Momento resultante

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

A soma dos torques sobre um corpo rígido é igual à soma dos torques das forças externas **se a linha de ação das forças internas coincidir com a linha que une as partículas em questão**

Forma "forte" da terceira lei de Newton

# Momento resultante




Forma fraca do princípio da ação-reação

Forma forte do princípio da ação-reação

# Momento angular

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

se for válida a forma forte do princípio da ação-reação

$$= \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i\right) - \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i\right) - \sum_i \vec{v}_i \cancel{\times (m_i\vec{v}_i)}$$

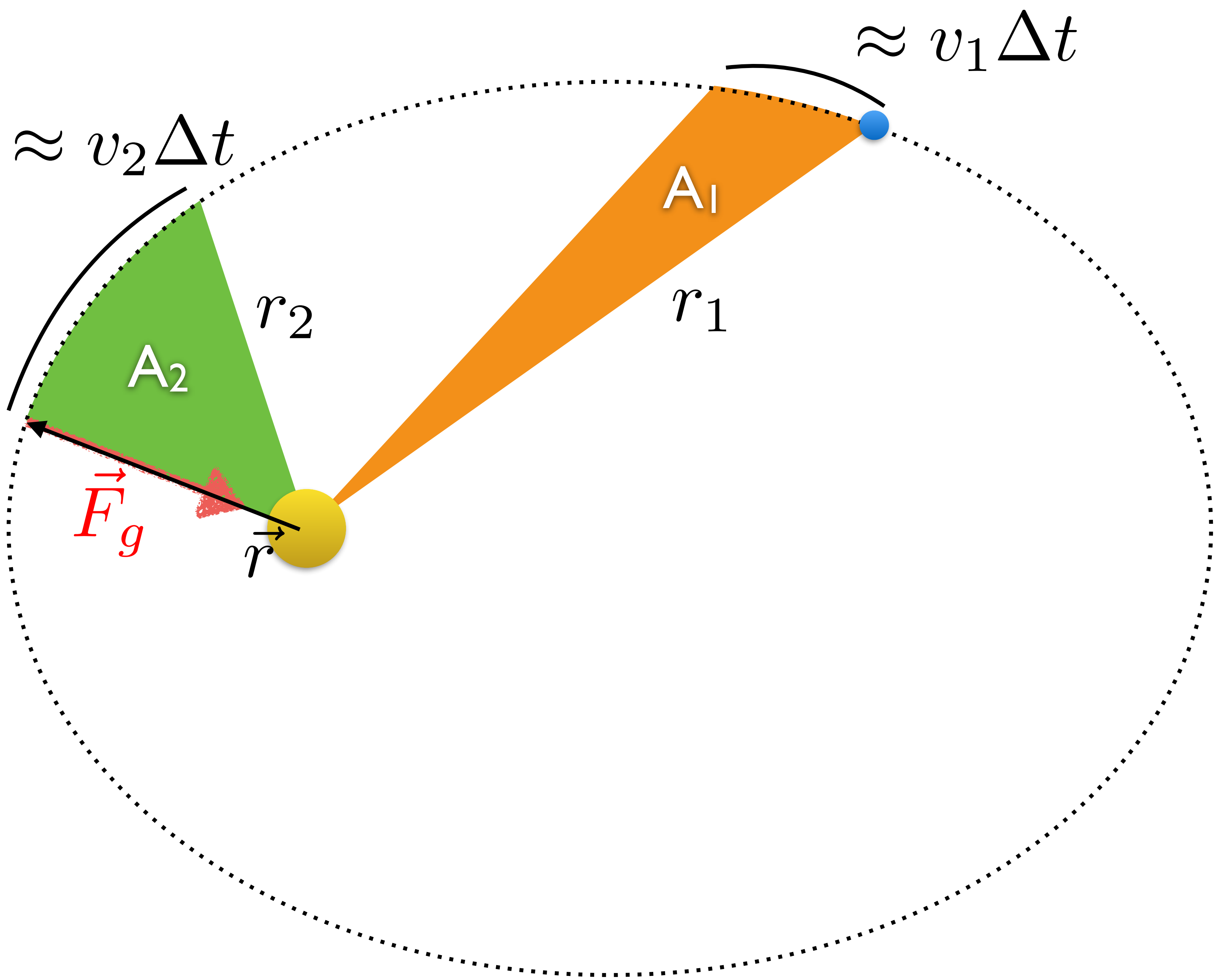
$$= \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Em relação à origem...

**Momento Angular**

$$\vec{L} = \sum_i \vec{\ell}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

# Lei das áreas




$$A_1 = A_2$$

$$A_1 \approx \frac{1}{2} r_1 v_1 \Delta t$$

$$A_2 \approx \frac{1}{2} r_2 v_2 \Delta t$$

$$r_1 v_1 = r_2 v_2$$

$$r_1 (m v_1) = r_2 (m v_2)$$

$$\boxed{\ell_1 = \ell_2}$$

$$\vec{\tau}_{\vec{F}_g} = \vec{r} \times \vec{F}_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0$$

# Tensor de inércia

$$\vec{L} = \sum_i \vec{\ell}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$= \sum_i m_i \left( r_i^2 \vec{\omega} - [\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}] \vec{r}_i \right)$$

$$L_x = \sum_i m_i \left( r_i^2 \omega_x - [x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z] x_i \right)$$

$$= \sum_i m_i \left( [r_i^2 - x_i^2] \omega_x - [x_i y_i] \omega_y - [x_i z_i] \omega_z \right)$$

$$\boxed{\vec{A} \times \left( \vec{B} \times \vec{C} \right) = \left( \vec{A} \cdot \vec{C} \right) \vec{B} - \left( \vec{A} \cdot \vec{B} \right) \vec{C}}$$

# Tensor de inércia

$$L_x = \sum_i m_i \left([r_i^2 - x_i^2]\omega_x - [x_i y_i]\omega_y - [x_i z_i]\omega_z\right)$$

$$L_y = \sum_i m_i \left(-[x_i y_i]\omega_x + [r_i^2 - y_i^2]\omega_y - [y_i z_i]\omega_z\right)$$

$$L_z = \sum_i m_i \left(-[x_i z_i]\omega_x - [y_i z_i]\omega_y + [r_i^2 - z_i^2]\omega_z\right)$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \sum_i m_i[r_i^2 - x_i^2] & -\sum_i m_i[x_i y_i] & -\sum_i m_i[x_i z_i] \\ -\sum_i m_i[x_i y_i] & \sum_i m_i[r_i^2 - y_i^2] & -\sum_i m_i[y_i z_i] \\ -\sum_i m_i[x_i z_i] & -\sum_i m_i[y_i z_i] & \sum_i m_i[r_i^2 - z_i^2] \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

**Tensor de inércia**

# Relação entre momento e velocidade angulares

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i[r_i^2 - x_i^2] & -\sum_i m_i[x_i y_i] & -\sum_i m_i[x_i z_i] \\ -\sum_i m_i[x_i y_i] & \sum_i m_i[r_i^2 - y_i^2] & -\sum_i m_i[y_i z_i] \\ -\sum_i m_i[x_i z_i] & -\sum_i m_i[y_i z_i] & \sum_i m_i[r_i^2 - z_i^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

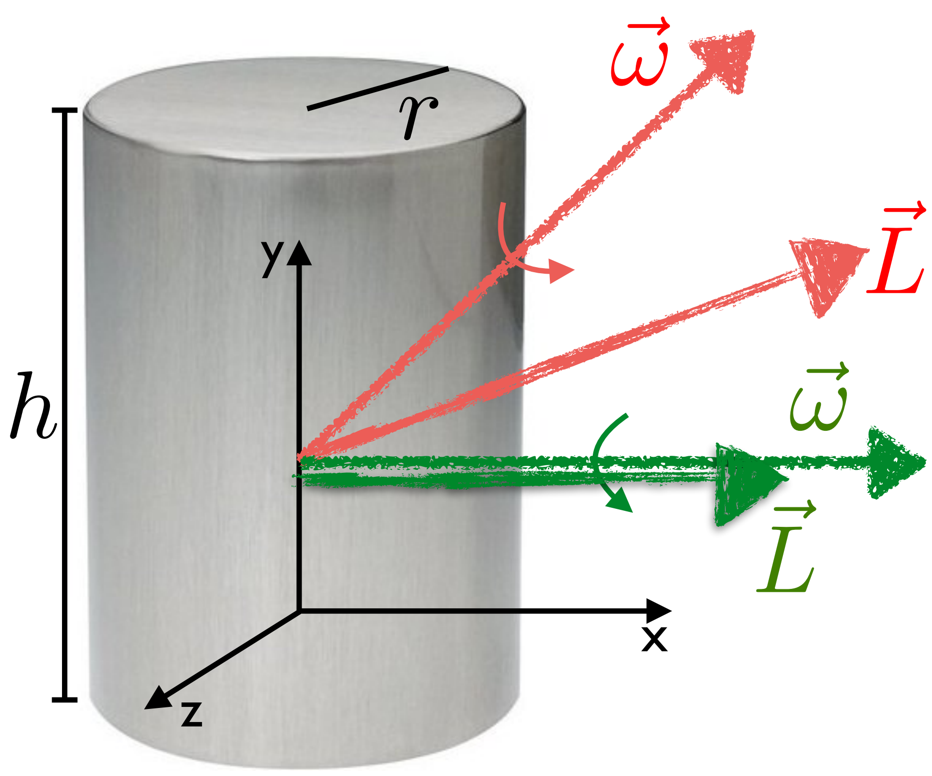
Se o eixo de rotação **NÃO** coincidir com um eixo de simetria do corpo rígido, o momento angular **PODE NÃO SER** paralelo à velocidade angular!!!

Se o eixo de rotação coincidir com um eixo de simetria do corpo, o momento angular **É PARALELO** à velocidade angular:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

# Relação entre momento e velocidade angulares

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m\left[h^2+3r^2\right] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m\left[h^2+3r^2\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$



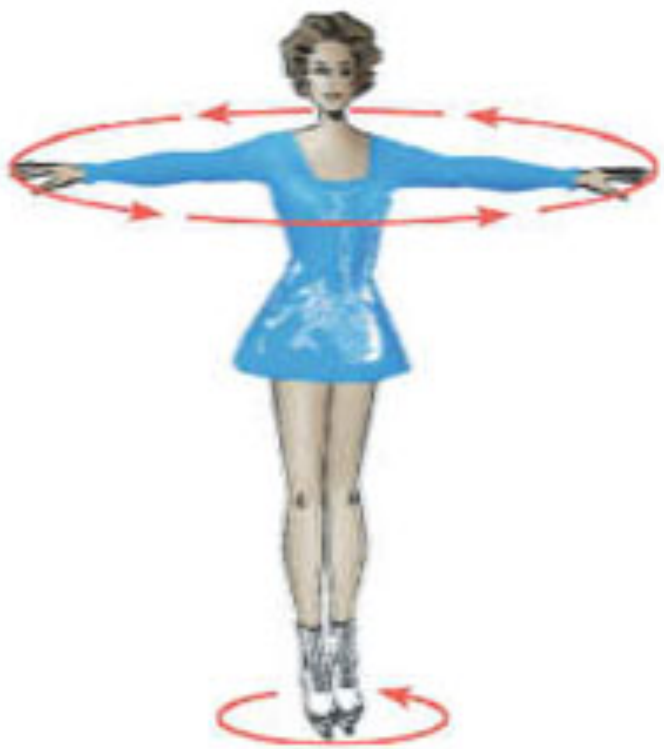

$$\omega_z = 0$$
$$L_z = 0$$

$$\vec{L} = \frac{1}{12}m\left[h^2+3r^2\right]\omega_x\hat{x} + \\ + \frac{1}{2}mr^2\omega_y\hat{y}$$

$$\omega_y = \omega_z = 0$$
$$L_y = L_z = 0$$

$$\vec{L} = \frac{1}{12}m\left[h^2+3r^2\right]\omega\hat{x}$$

# Bailarina



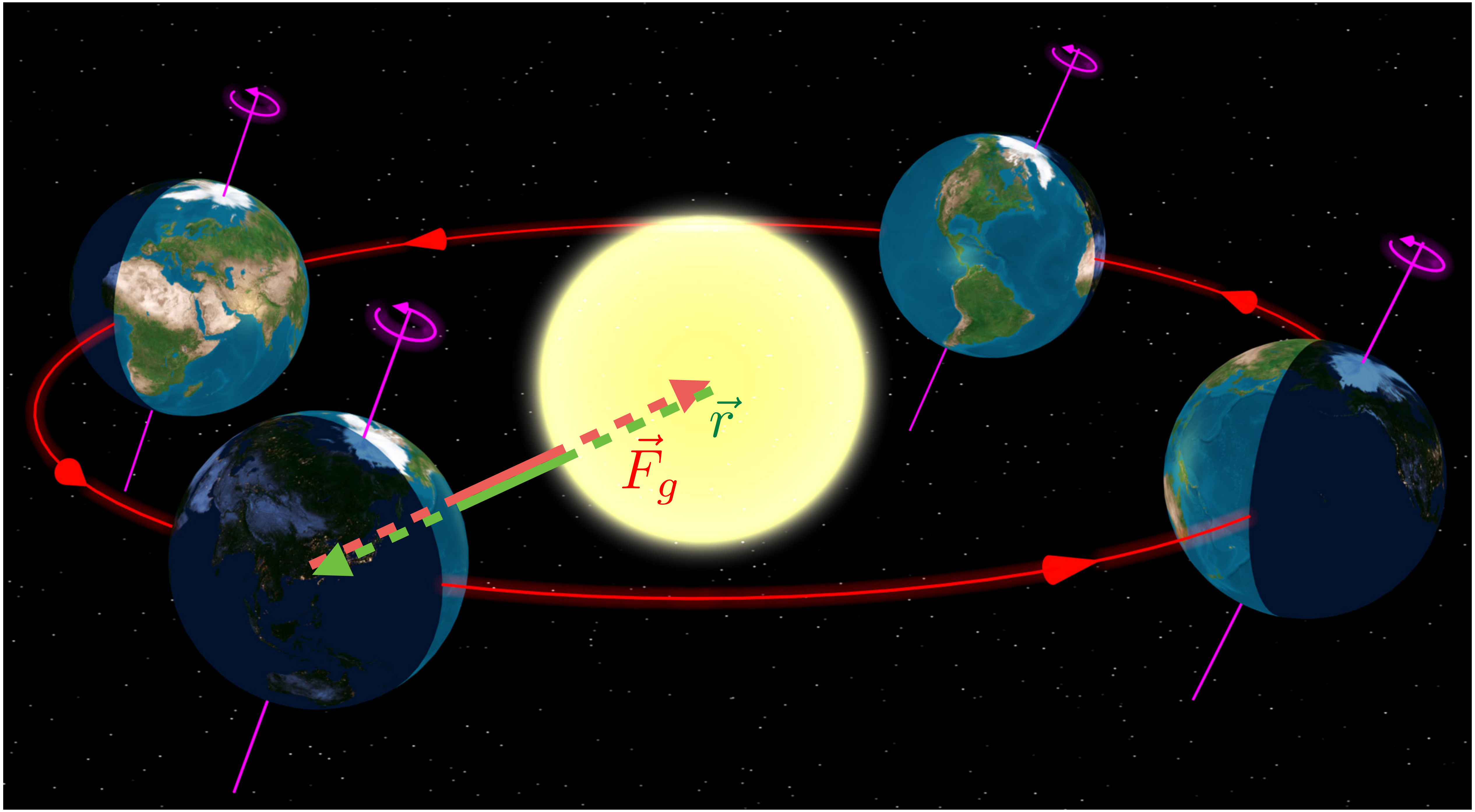
$$I_{\vec{\omega}} = {}_{I}\vec{\omega}$$

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \vec{\tau}_{\vec{N}} + \vec{\tau}_{\vec{F}_g} = 0$$

$$\vec{L} = \text{constante}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

# Estações do ano




$$\vec{\tau}_{\vec{F}_g} = \vec{r} \times \vec{F}_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = I\vec{\omega} = \text{constante}$$

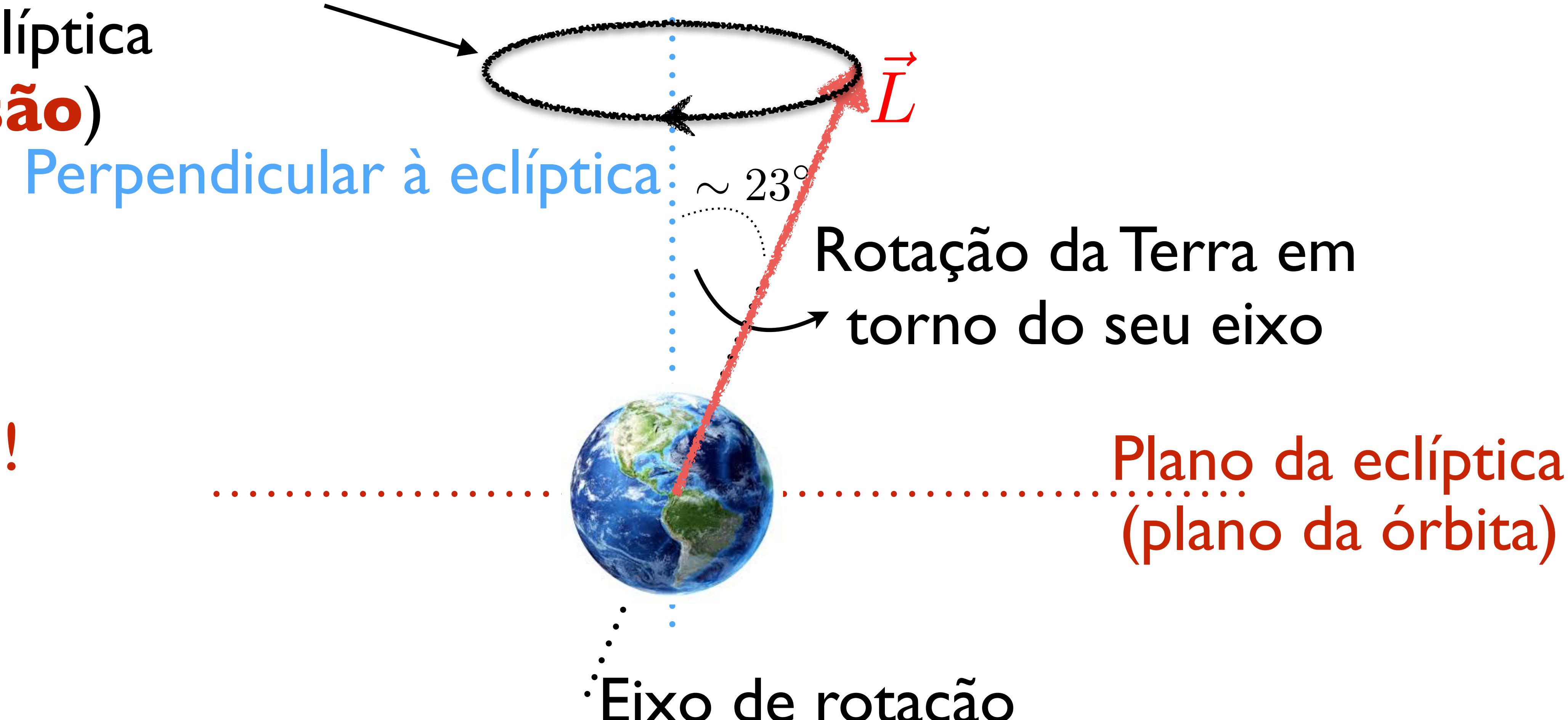
# Precessão dos equinócios

Na realidade, como a Terra não é perfeitamente esférica:

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \sum_{i \in \text{Terra}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{g,i} \neq 0$$

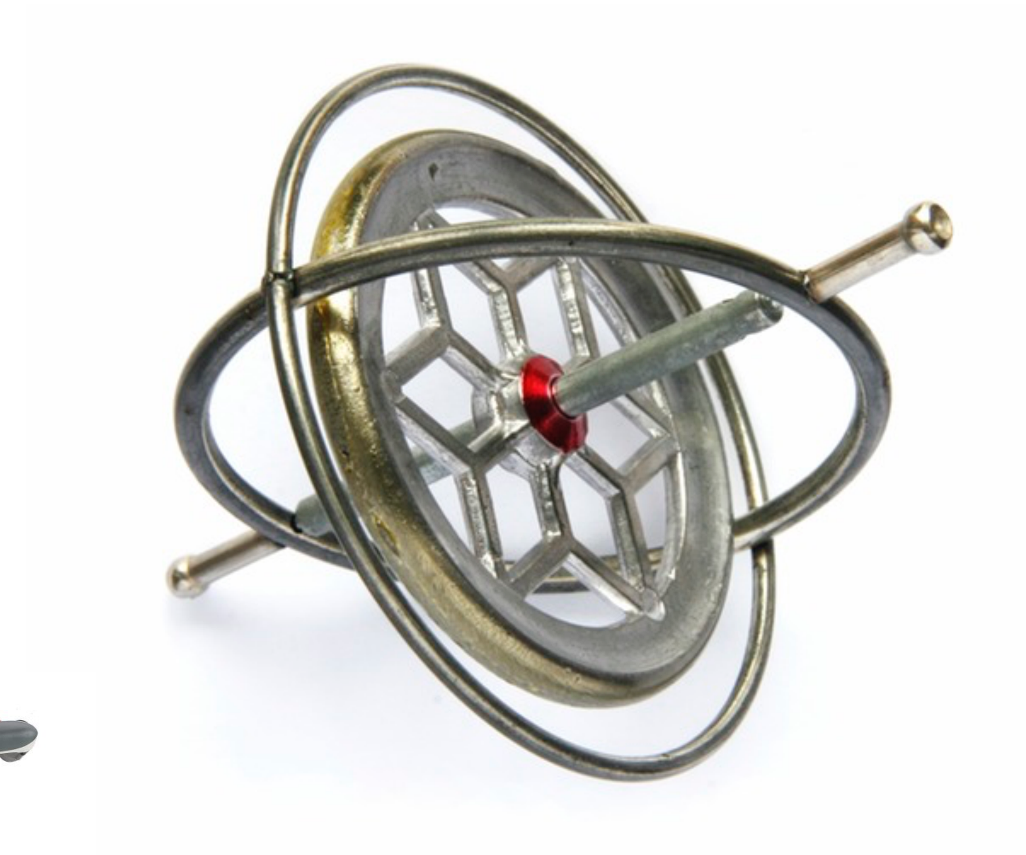
O momento angular da Terra não é constante!

"Rotação" do momento angular da Terra em torno da normal à eclíptica (**precessão**)



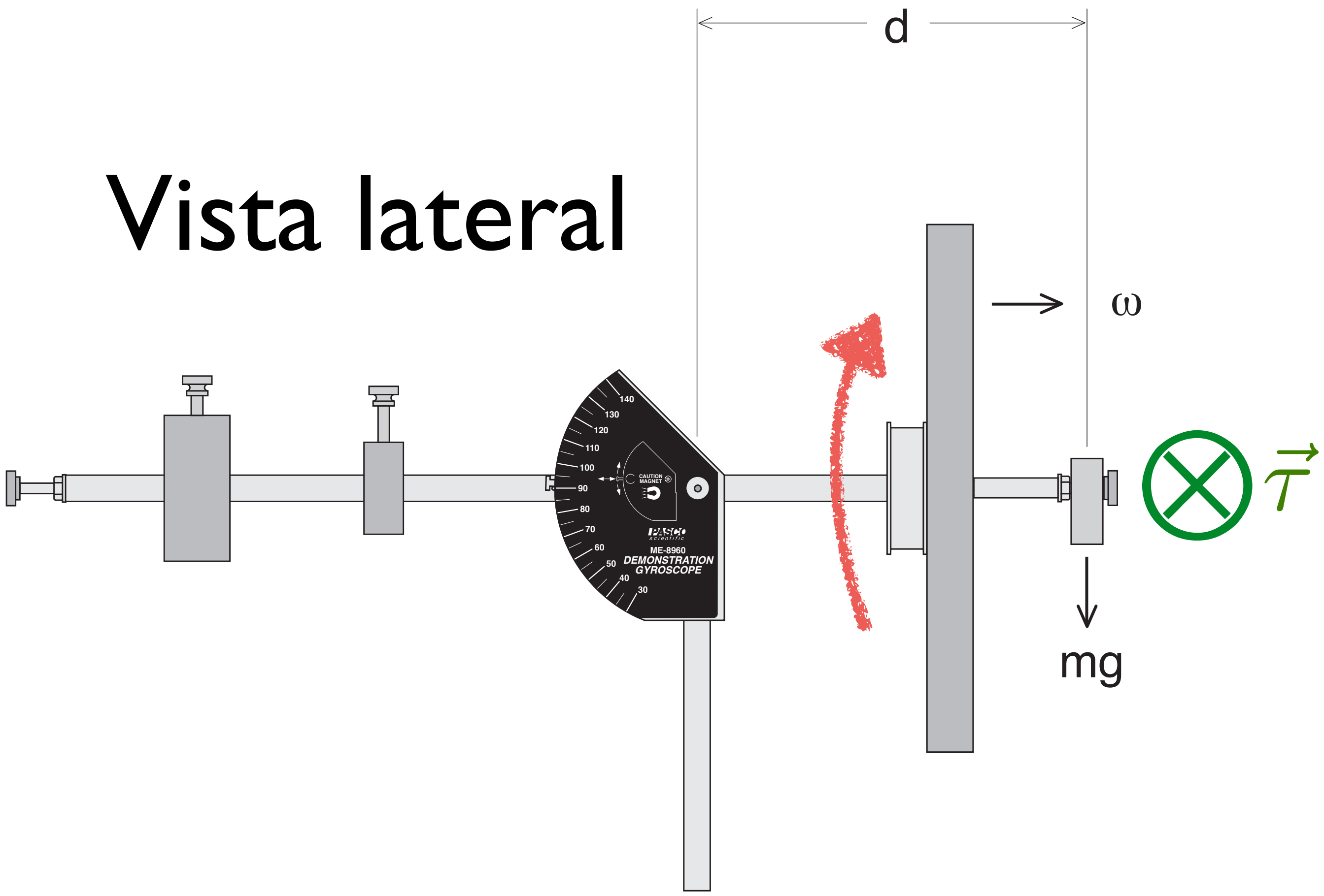

As estações do ano vão "rodar"!!! (o período de "rotação" é ~26000 anos…)

# Giroscópios

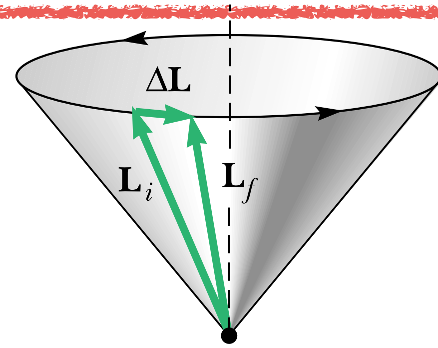


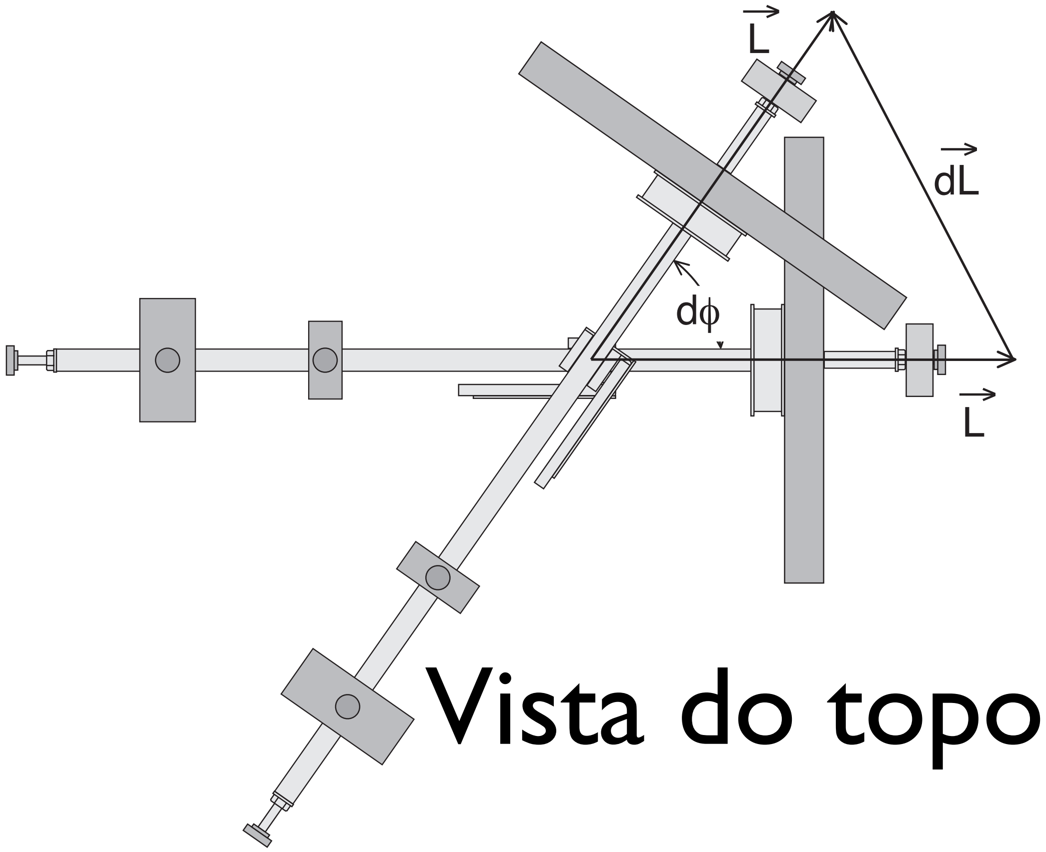
# Precessão

Vista lateral




O vetor momento angular precessa ("roda") em torno da vertical



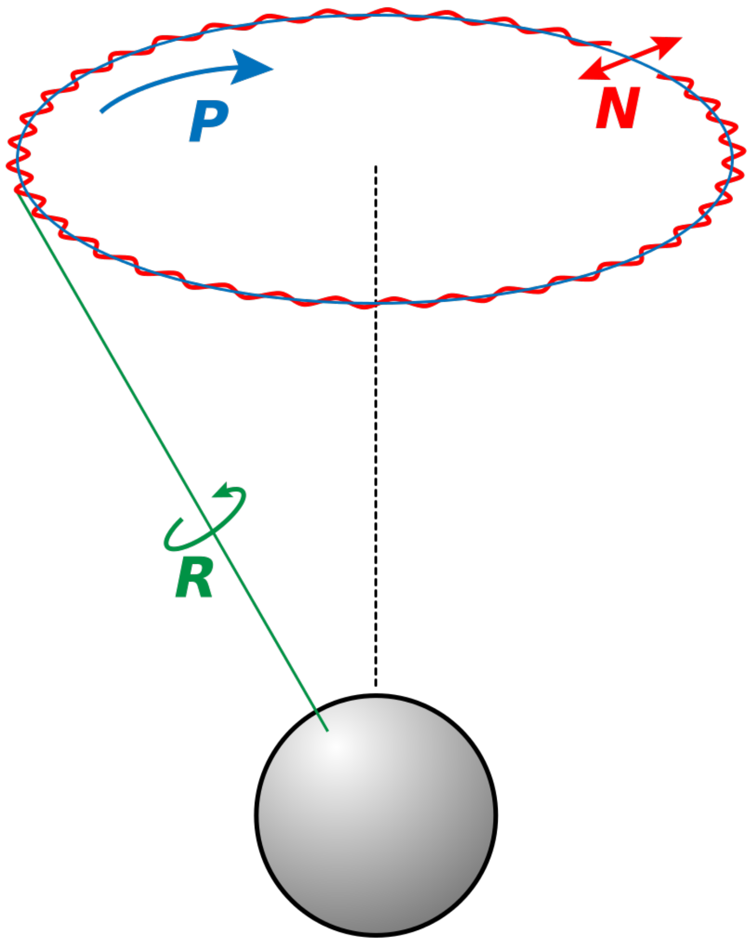




Vista do topo

$$\vec{\tau} \perp \vec{L} \qquad \qquad \left| \vec{L} \right| \text{ é constante}$$

$$d\vec{L} = \vec{\tau} dt \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left| \vec{L} \right| \text{ é constante} \\ \vec{L} \text{ muda de direção} \end{array} \right.$$

# Nutação

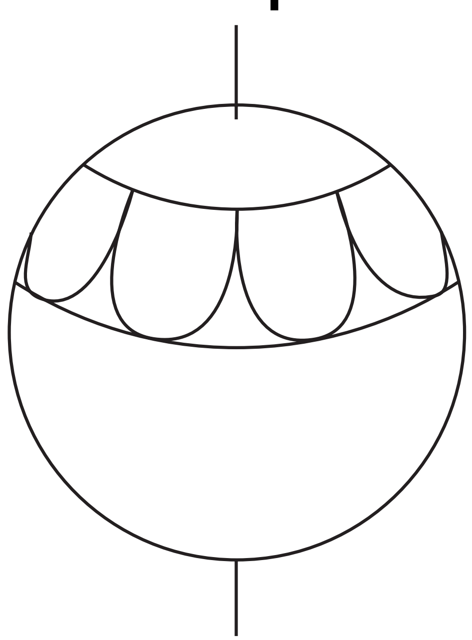



O vetor momento angular nuta ("oscila") em torno da "trajetória" da sua precessão

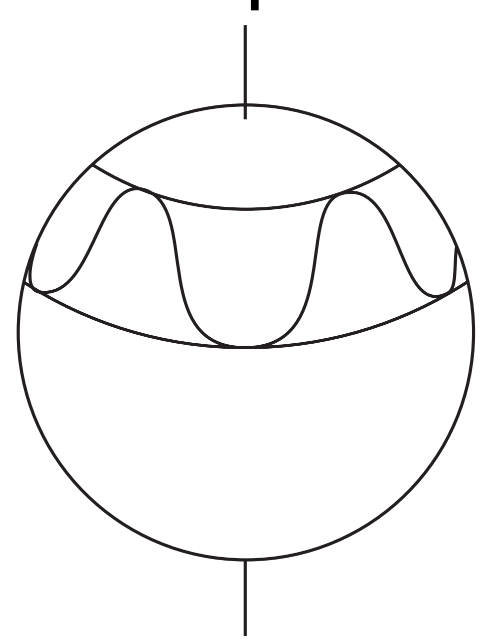

Posição do Trópico de Câncer na Carretera 83, no México

# Nutação

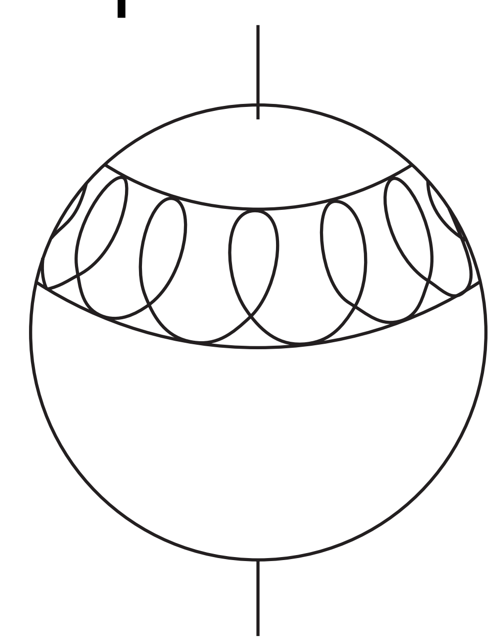
Sem impulso no sentido da precessão



Com impulso no sentido da precessão



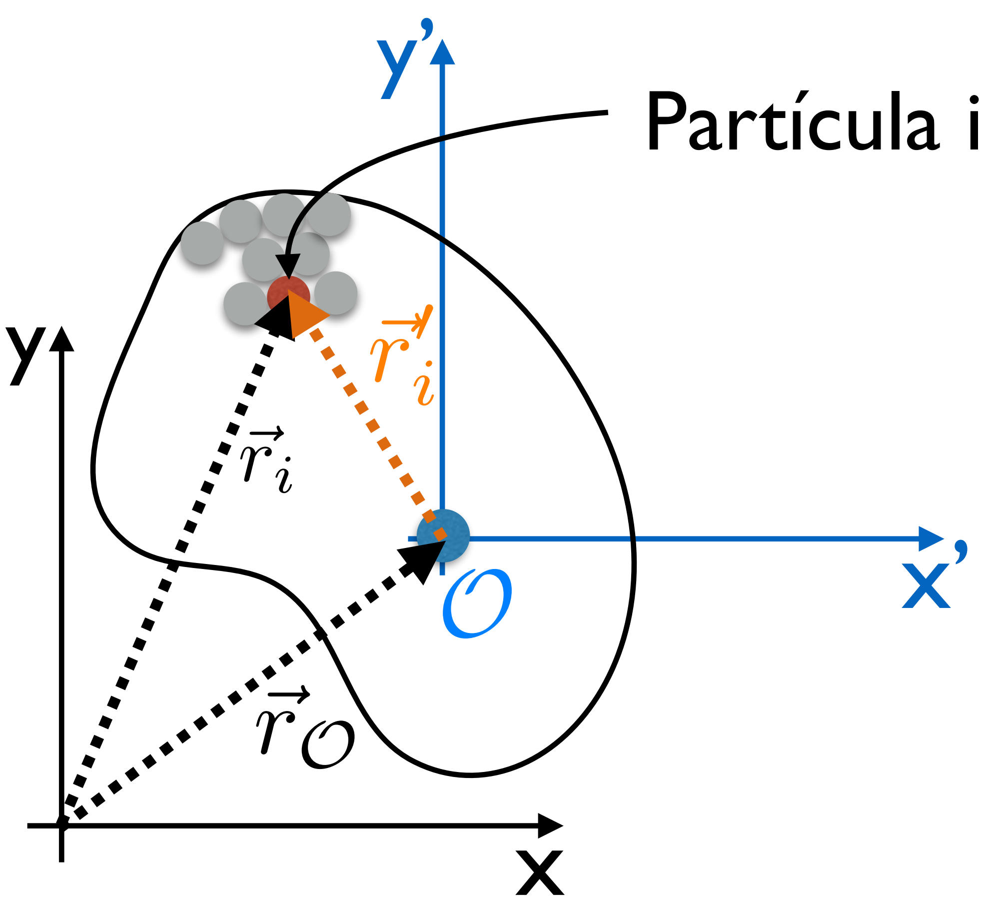
Com impulso no sentido contrário ao da precessão



# Momento angular

Tal como para o torque, é **sempre** necessário indicar o ponto em relação ao qual se calcula o momento angular!

Mas há cuidados adicionais a ter…




$$\vec{L}_\mathcal{O} = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$$
$$= \sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_\mathcal{O}\right) \times \left(\vec{v}_i - \vec{v}_\mathcal{O}\right)$$

# Momento angular

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathcal{O}}\right) \times \left(\vec{v}_i - \vec{v}_{\mathcal{O}}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_{\mathcal{O}}}{dt} &= \sum_i m_i \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathcal{O}}\right) \times \left(\vec{v}_i - \vec{v}_{\mathcal{O}}\right) + \\
&\qquad + \sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathcal{O}}\right) \times \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i - \vec{v}_{\mathcal{O}}\right) \\
&= \sum_i m_i \left(\vec{v}_i - \vec{v}_{\mathcal{O}}\right) \cancel{\times} \left(\vec{v}_i - \vec{v}_{\mathcal{O}}\right) + \\
&\qquad + \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathcal{O}}\right) \times \left(\left[\vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \vec{F}_{ji}\right] - m_i \vec{a}_{\mathcal{O}}\right) \\
&= \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathcal{O}}\right) \times \vec{F}_i^{\text{ext}} - \sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathcal{O}}\right) \times \vec{a}_{\mathcal{O}}
\end{aligned}$$

Este termo devia ser nulo...

# Momento angular

$$\sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathcal{O}}\right) \times \vec{a}_{\mathcal{O}} = M\left(\vec{R}_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_{\mathcal{O}}\right) \times \vec{a}_{\mathcal{O}} \stackrel{?}{=} 0$$

☞ $\vec{a}_{\mathcal{O}} = 0$ Referencial S' é inercial… apesar de acompanhar o corpo rígido

**ou**

☞ $\vec{r}_{\mathcal{O}} = \vec{R}_{\mathrm{CM}}$ Escolhe-se o centro de massa para calcular os momentos

**ou**

☞ $\left(\vec{R}_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_{\mathcal{O}}\right) \parallel \vec{a}_{\mathcal{O}}$ Demasiado complicado 😉

# Dinâmica do corpo rígido

$$\vec{F}_{\text{total}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}_{\text{CM}}}{dt}$$

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

# Dinâmica do corpo rígido

- Assume-se a forma forte do princípio da ação-reação
- Os torques e momentos angulares são calculados em relação ao mesmo ponto
- Esse ponto tem de ser o centro de massa ou não estar acelerado
- O eixo em relação ao qual se calculam os momentos de inércia tem de incluir o ponto em relação ao qual se calculam os momentos angulares e o torque

# Dinâmica do corpo rígido

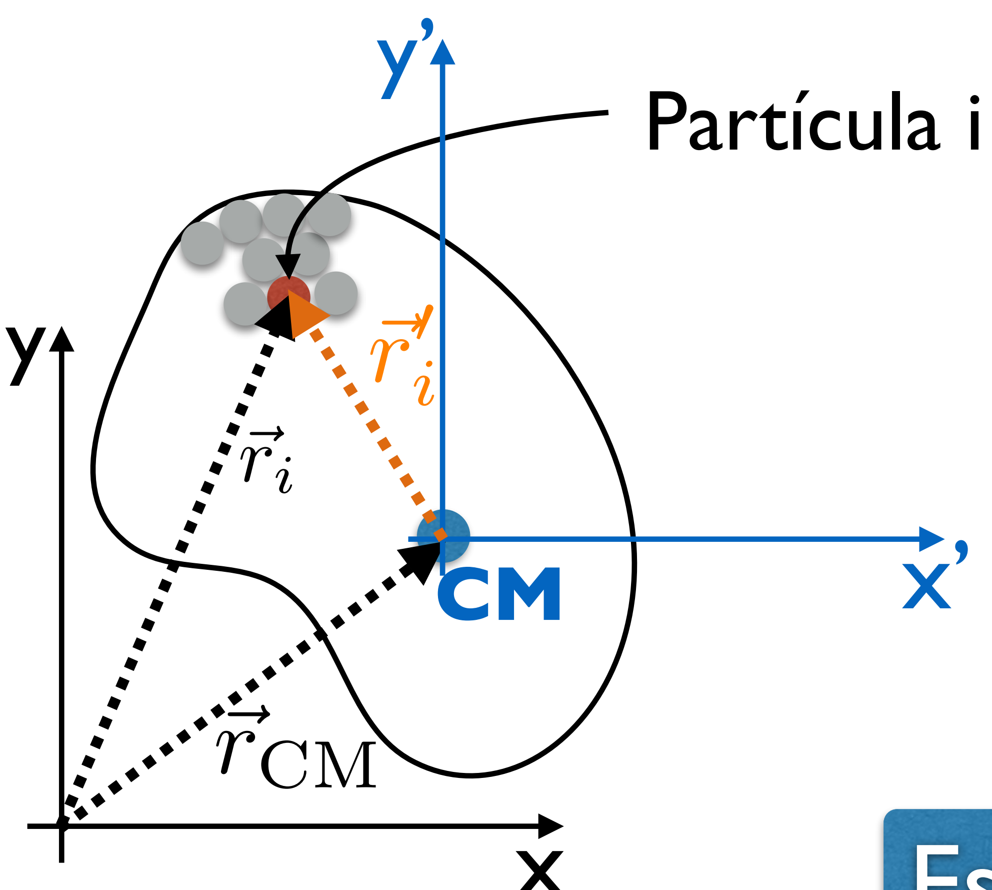
Para descrever o movimento geral de um corpo basta estudar o movimento do centro de massa e o movimento de rotação do corpo em torno de um eixo instantâneo de rotação (que, em muitos casos, passa pelo centro de massa…)

Algumas grandezas dinâmicas, como a energia cinética e o momento angular, têm um valor que depende dos dois “tipos” de movimento do corpo…

# Energia cinética

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,\prime} + \vec{r}_{\mathrm{CM}}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,\prime} + \vec{v}_{\mathrm{CM}}$$



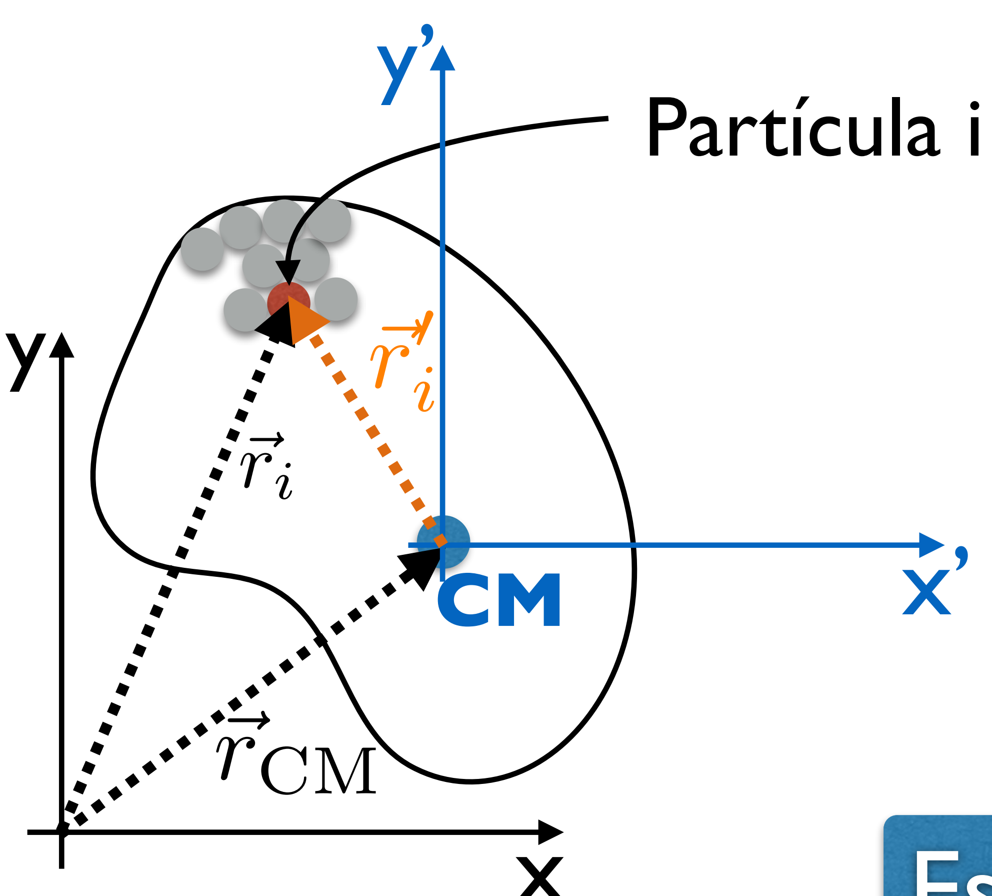

$$\begin{aligned}
E_c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i^{\,\prime} + \vec{v}_{\mathrm{CM}}) \cdot (\vec{v}_i^{\,\prime} + \vec{v}_{\mathrm{CM}}) \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left( v_i^{\prime 2} + \cancel{2\vec{v}_{\mathrm{CM}} \cdot \vec{v}_i^{\,\prime}} + v_{\mathrm{CM}}^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2
\end{aligned}$$

Esta decomposição só é válida no CM!!!

# Momento angular

$$\vec{r}_i = \vec{r}\,'_i + \vec{r}_{\rm CM}$$

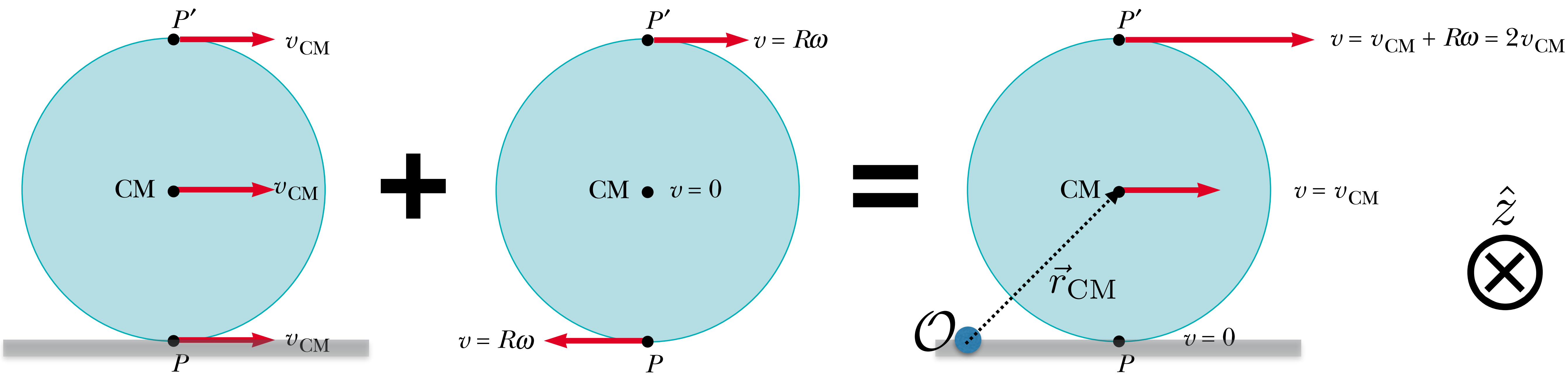
$$\vec{v}_i = \vec{v}\,'_i + \vec{v}_{\rm CM}$$




$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\
&= \sum_i m_i \left(\vec{r}\,'_i + \vec{r}_{\rm CM}\right) \times \left(\vec{v}\,'_i + \vec{v}_{\rm CM}\right) \\
&= \sum_i m_i \vec{r}\,'_i \times \vec{v}\,'_i + \vec{r}_{\rm CM} \times \left(\cancel{\sum_i m_i \vec{v}\,'_i}\right) \\
&\quad + \left(\cancel{\sum_i m_i \vec{r}\,'_i}\right) \times \vec{v}_{\rm CM} \\
&\quad + \vec{r}_{\rm CM} \times \left(\sum_i m_i\right) \vec{v}_{\rm CM} \\
&= I\vec{\omega} + \vec{r}_{\rm CM} \times \vec{p}_{\rm CM}
\end{aligned}$$

Esta decomposição só é válida no CM!!!

# Disco a rolar sem deslizar

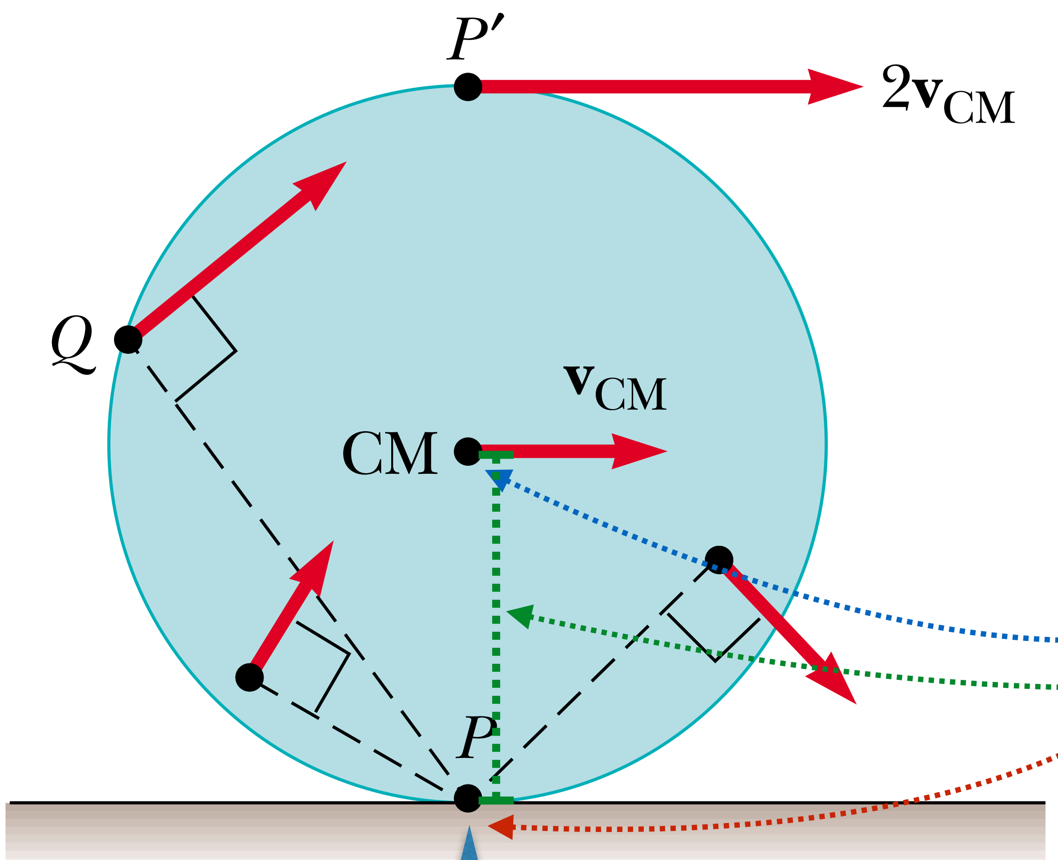



Translação | Rotação | Translação e rotação

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2} \frac{M R^2}{2} \left( \frac{v_{\mathrm{CM}}}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} M v_{\mathrm{CM}}^2$$

$$\vec{L} = M R v_{\mathrm{CM}} \hat{z} + I \omega \hat{z} = M R v_{\mathrm{CM}} \hat{z} + \frac{M R^2}{2} \frac{v_{\mathrm{CM}}}{R} \hat{z} = \frac{3}{2} M R v_{\mathrm{CM}} \hat{z}$$

# Disco a rolar sem deslizar




$$I = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\omega^2 = \frac{3}{4}Mv_{\mathrm{CM}}^2$$

$$\vec{L} = \frac{3}{2}MR^2\omega\hat{z} = \frac{3}{2}MRv_{\mathrm{CM}}\hat{z}$$

$$\left(\vec{R}_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_{\mathcal{O}}\right) \parallel \vec{a}_{\mathcal{O}} \quad !!!!$$

Quando o corpo rola sem deslizar, podemos considerar que o movimento é uma rotação “pura” que se dá em torno de um eixo instantâneo que passa pelo ponto de contacto com o solo…

# Leis de conservação

- **Energia mecânica**
  (se não houver forças dissipativas)
  **Simetria de translação no tempo**
- **Momento linear**
  (se a resultante das forças externas for nula)
  **Simetria de translação no espaço**
- **Momento angular**
  (se o torque das forças externas for nulo)
  **Simetria de rotação no espaço**

# Equilíbrio de um corpo rígido

Equilíbrio de translação: $\vec{F}_{\text{total}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$

$$\oplus$$

Equilíbrio de rotação: $\vec{\tau}_{\text{total}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$

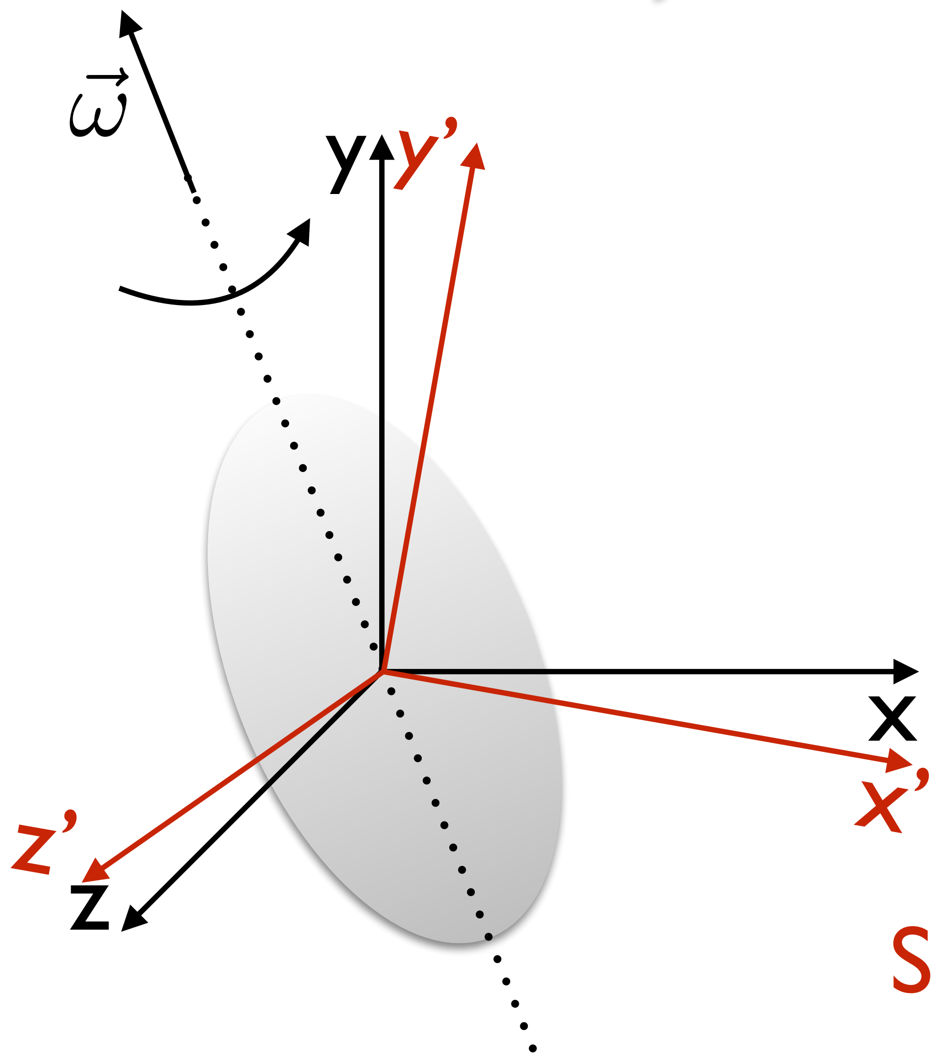
Em geral, o torque depende do ponto em relação ao qual é calculado… Mas, quando a resultante das forças externas é nula:

$$\vec{\tau}_{\text{total}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_{\mathcal{O}}\right) \times \vec{F}_i^{\text{ext}}\,, \quad \forall \vec{r}_{\mathcal{O}}$$

# Forças inerciais na rotação

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \frac{d\hat{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}$$

no referencial S, e para qualquer vetor unitário ê que rode com o corpo




$$\vec{G} = G_x \hat{x}' + G_y \hat{y}' + G_z \hat{z}'$$

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{S'} = \frac{dG_x}{dt}\hat{x}' + \frac{dG_y}{dt}\hat{y}' + \frac{dG_z}{dt}\hat{z}'$$

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{S'} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dG_i}{dt}\hat{x}_i{}'$$

S' = Sistema de referência fixo no corpo e cuja origem coincide com a do referencial S

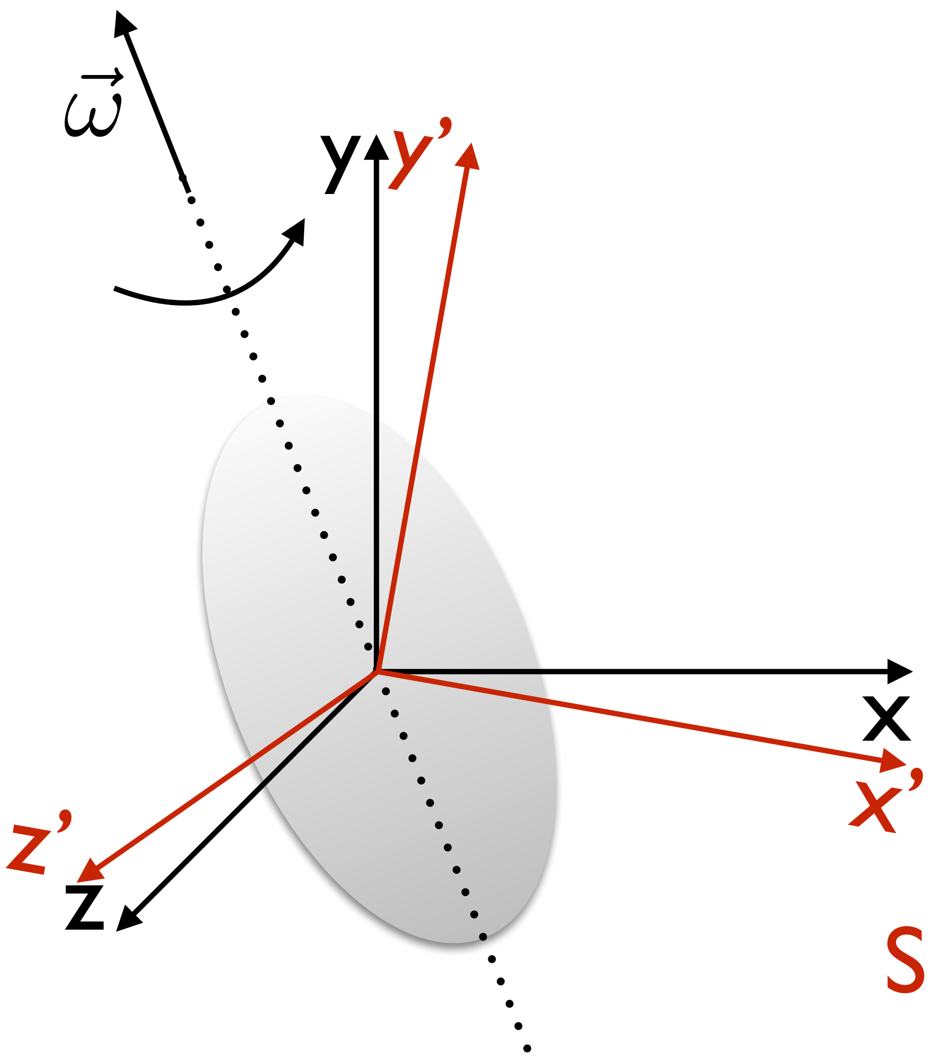
S = Sistema de referência fixo no espaço

# Forças inerciais na rotação

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_S = \sum_{i=1}^{3} \frac{dG_i}{dt}\hat{x}_i{}' + \sum_{i=1}^{3} G_i \frac{d\hat{x}_i{}'}{dt}$$

$$= \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{S'} + \sum_{i=1}^{3} G_i \left(\vec{\omega} \times \hat{x}_i{}'\right)$$

$$= \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{G}$$



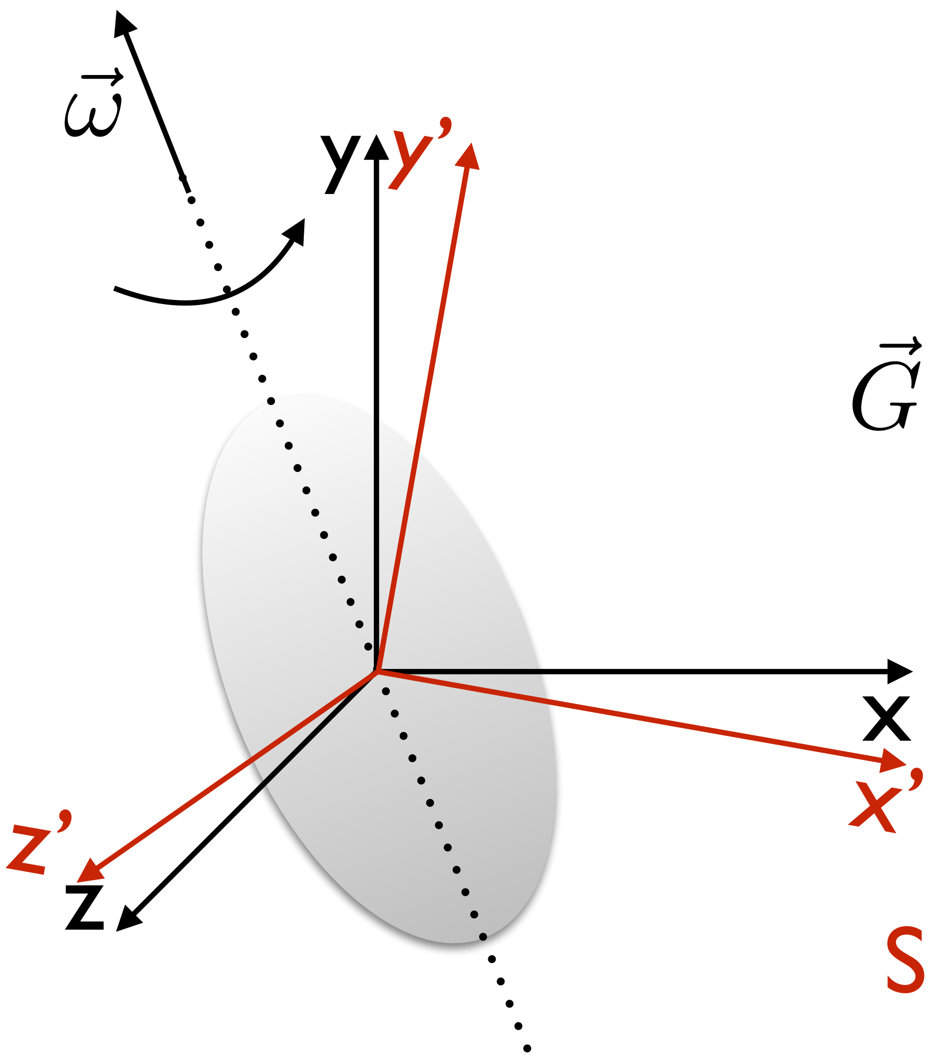

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}$$

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{S'} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dG_i}{dt}\hat{x}_i{}'$$

S' = Sistema de referência fixo no corpo e cuja origem coincide com a do referencial S

S = Sistema de referência fixo no espaço

# Forças inerciais na rotação




$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{G}$$

$\vec{G}$ é uma grandeza vetorial qualquer…

S' = Sistema de referência fixo no corpo e cuja origem coincide com a do referencial S

S = Sistema de referência fixo no espaço

# Forças inerciais na rotação

$$\vec{G} \equiv \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

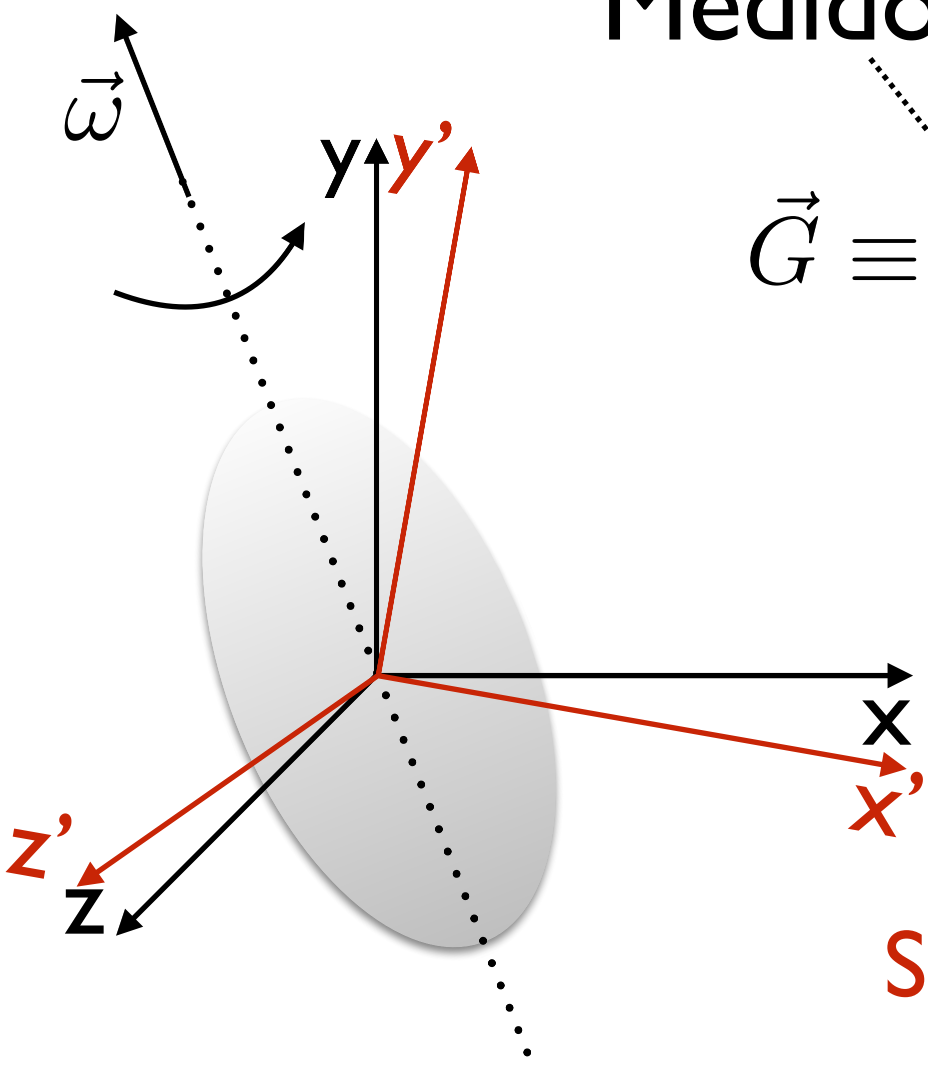
Medidos em S…

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{G} \equiv \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{v} =$$

$$= \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{S'} + \left(\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]\right)_{S'} +$$

$$+\vec{\omega} \times \left(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

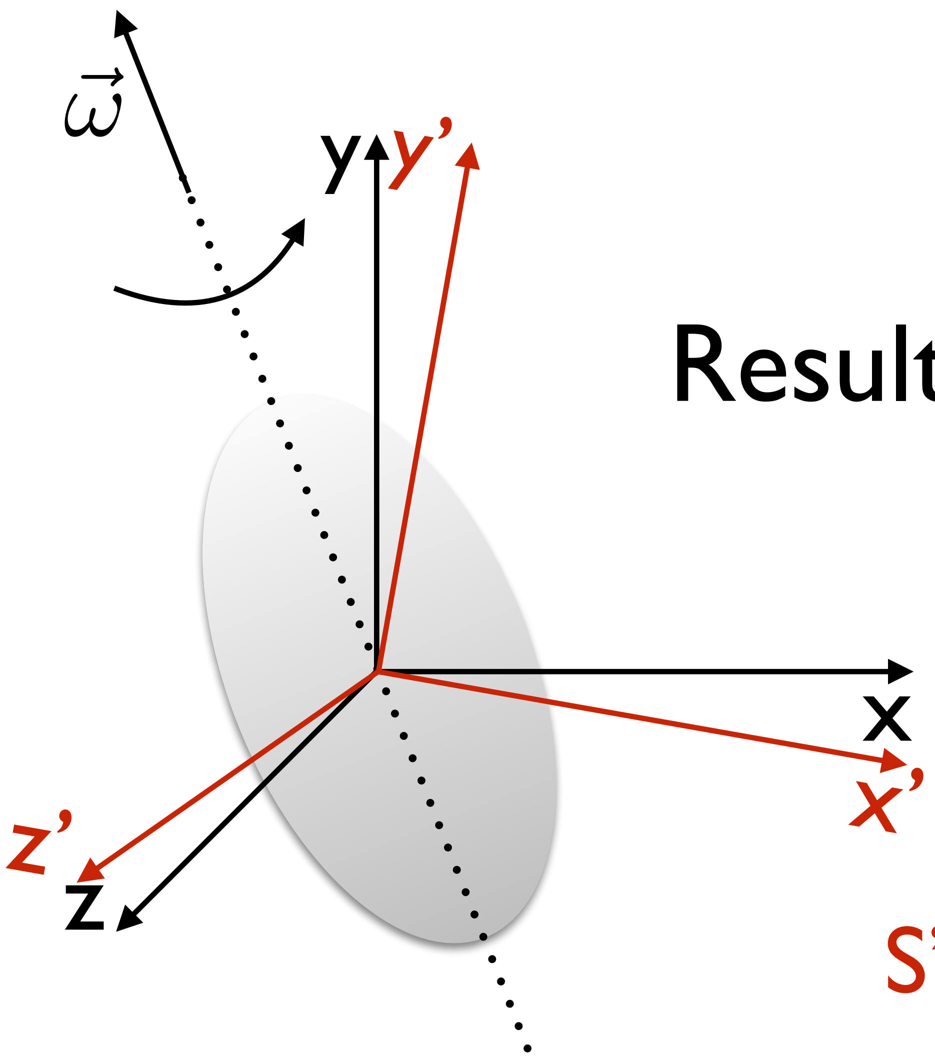



S' = Sistema de referência fixo no corpo e cuja origem coincide com a do referencial S

S = Sistema de referência fixo no espaço

# Forças inerciais na rotação

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$




$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}$$

Resultante das forças **reais**

Forças fictícias

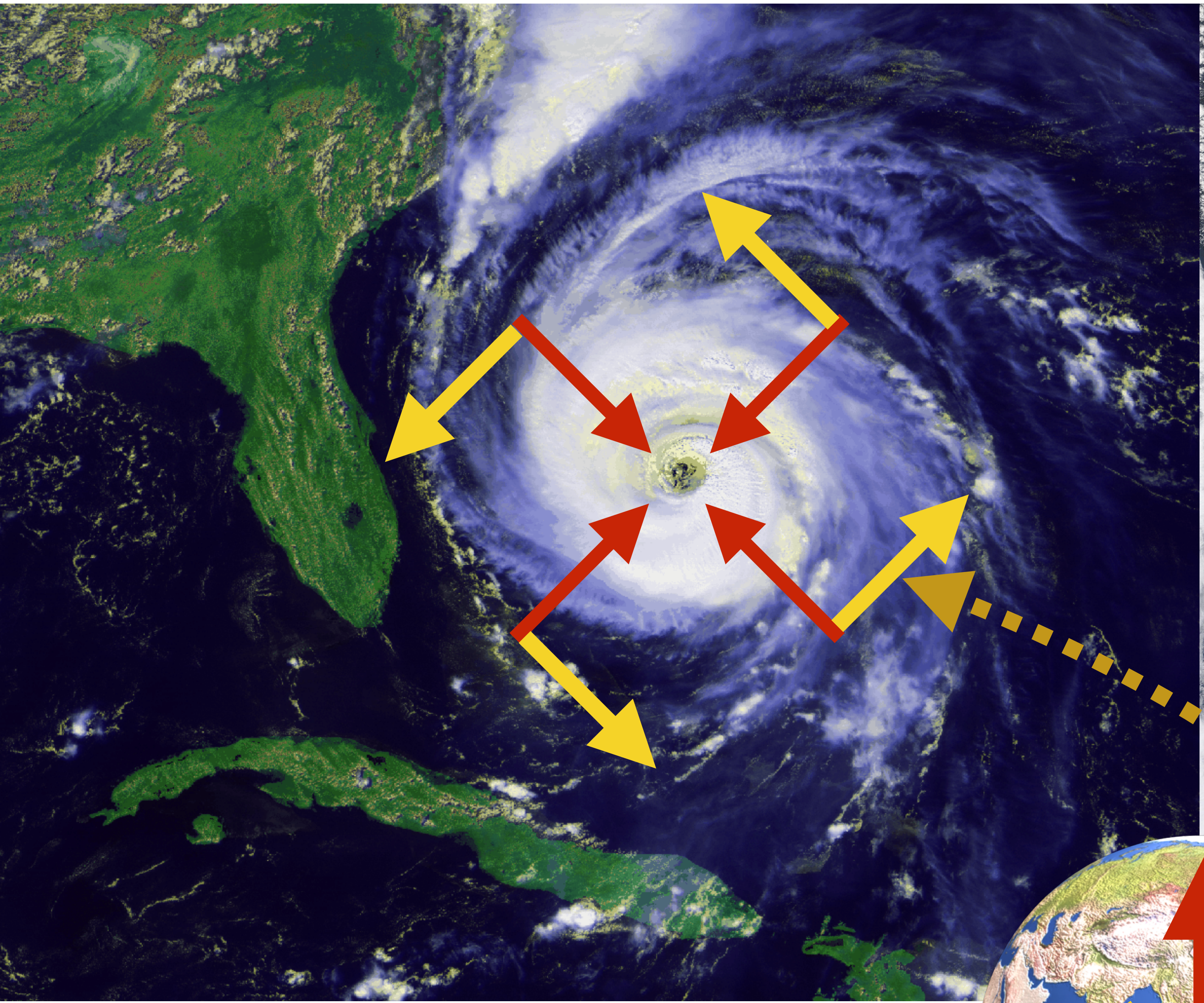
- Força de Coriolis
- Força "centrífuga"

S' = Sistema de referência fixo no corpo e cuja origem coincide com a do referencial S

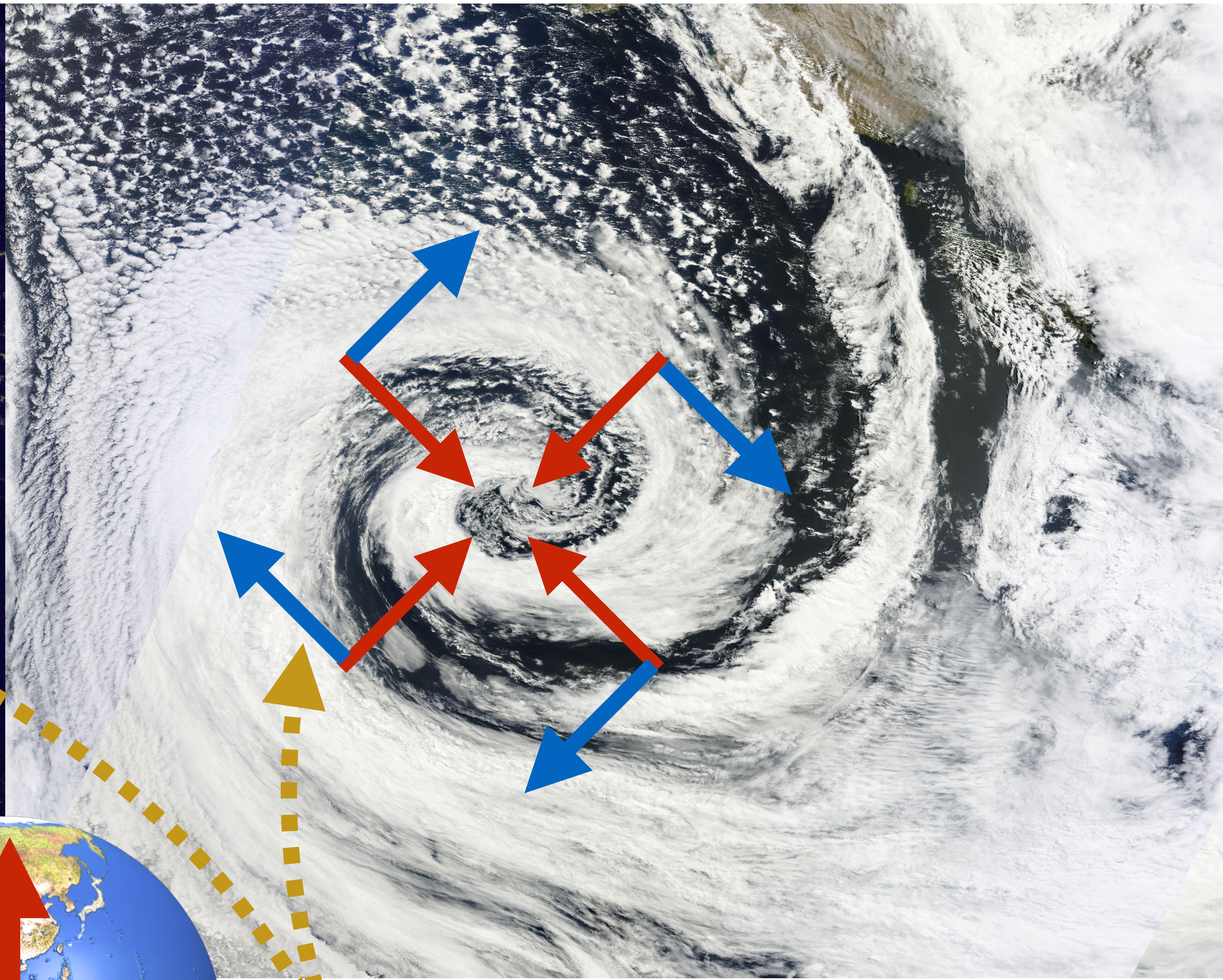
S = Sistema de referência fixo no espaço

# Força de Coriolis

Flórida e Cuba



Costa Sul da Austrália



O ar desloca-se para um centro de baixas pressões…

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

# Pêndulo de Foucault


$$\Omega_z = \Omega \cos\theta$$

Velocidade de rotação do plano de oscilação do pêndulo

Co-latitude (Lat=90°-θ)

Velocidade de rotação da Terra


Em Coimbra:

$$\Omega_z = \Omega \cos 50^\circ \approx 231.4^\circ/\text{dia}$$
$$= 9.64^\circ/\text{hora}$$