

Olimpíadas de Física 2008

Seleccção para as provas internacionais

Prova Teórica

Sociedade Portuguesa de Física

24/Maio/2008

Prova Teórica

Duração da prova: 4h

I Vários tópicos

1. Supõe-se que alguns asteróides são apenas amontoados de rochas que se mantêm unidas exclusivamente devido à gravidade. Considerando que a densidade das rochas de um asteróide é 2000 kg/m^3 , mostrar que este tipo de asteróides não pode ter períodos de rotação inferiores a 2,3 horas, qualquer que seja o seu tamanho.
2. Um feixe de electrões com velocidade de grandeza v_0 é ejectado num ponto P no interior de uma bobina. A bobina é um enrolamento toroidal percorrido por uma corrente constante e no seu interior há um campo magnético \vec{B} . Os electrões são ejectados na direcção das linhas de campo, mas o feixe não se pode considerar fino, havendo uma pequena dispersão que pode ser caracterizada pela abertura angular, $2\alpha_0 \ll 1$, do feixe ao entrar na bobina (ver figura). Devido a esta dispersão o feixe fica ‘desfocado’ e é ‘refocado’ em alguns pontos da trajectória. Encontrar o campo \vec{B} que origina 4 pontos de focagem separados de 90° (ver figura).

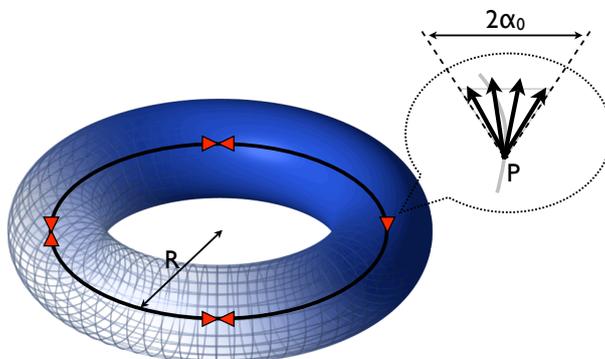


Figura 1: A trajectória dos electrões. Os triângulos indicam os locais de focagem/desfocagem do feixe.

3. Um planeta de massa M e raio R está rodeado por uma atmosfera de densidade constante que consiste de um gás de massa molar μ . A altura h da atmosfera é muito menor que o raio do planeta ($h \ll R$) e o planeta encontra-se nos confins do seu sistema, muito longe de qualquer estrela. Qual é a temperatura da atmosfera à superfície do planeta?
4. O minério de urânio contém tipicamente $^{238}_{92}\text{U}$ e $^{235}_{92}\text{U}$ na proporção $N_{235}/N_{238} = 0,0072$. Em Oklo, no Gabão, há uma mina de urânio em que a abundância relativa destes isótopos é 0,004. Pensa-se que essa mina é o que resta de um reactor

nuclear natural que esteve em acção por um período prolongado há vários milhões de anos. Para tal contribuiu a provável presença de água no depósito de minério que funcionou como moderador da reacção em cadeia. Sabendo que, num reactor nuclear moderno moderado a água, é necessário utilizar como combustível urânio enriquecido de modo a que $N_{235}/N_{238} = 0,03$, estimar há quanto tempo o reactor de Oklo operou. ($T_{1/2}(^{238}_{92}\text{U})=4,5 \times 10^9$ anos e $T_{1/2}(^{235}_{92}\text{U})=7,13 \times 10^8$ anos.)

- Dois fotões que se deslocam em direcções diferentes mas que possuem a mesma energia E colidem. O ângulo entre as direcções de propagação dos fotões é θ . Da colisão resulta a formação de uma partícula X de massa M . Determinar o valor de M .

II Electromagnetismo

- Um disco metálico de massa m e raio R cai verticalmente numa região onde existe um campo magnético uniforme de intensidade B (ver figura). O campo magnético é paralelo à superfície da Terra e ao plano do disco. O disco tem uma espessura d muito menor que o seu raio e a aceleração da gravidade é g .

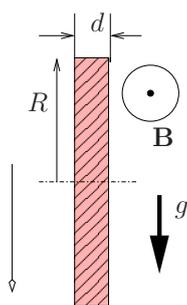


Figura 2: Vista lateral do disco em queda.

- Determinar a distribuição de cargas no disco.
 - Obter a aceleração a do disco.
 - De quanto difere, percentualmente, a de g ? (É necessário estimar realisticamente o valor de alguns dos parâmetros do problema.)
- Do ponto de vista eléctrico, a superfície da Terra pode ser considerada um bom condutor, com uma densidade média de carga superficial σ_0 . O campo eléctrico junto à superfície aponta para a Terra e tem aproximadamente o valor de 150 V/m.
 - Calcular o valor da densidade de carga superficial e a carga total na superfície da Terra¹.
 - A intensidade do campo eléctrico diminui com a altitude, sendo de cerca de 100 V/m a uma altitude de 100 m acima do solo. Calcular o valor médio da carga por m^3 na camada atmosférica compreendida entre a superfície da Terra e a altitude de 100 m.

¹ $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m; $R_T \simeq 6,4 \times 10^6$ m.

- (c) A densidade volumétrica de carga calculada na alínea anterior resulta da existência de um elevado número de iões mono-carregados, tanto positivos, n_+ , como negativos, n_- , por unidade de volume. Perto da superfície da Terra, pode considerar-se que $n_+ \sim n_- \sim 6 \times 10^8 \text{m}^{-3}$. Estes iões movem-se sob a acção do campo eléctrico da Terra, sendo a sua velocidade proporcional à intensidade, E , do campo: $v = 1,5 \times 10^{-4} E$. Determinar o tempo que os iões atmosféricos demorariam a reduzir a carga existente na superfície da Terra a 10^{-3} do seu valor, se não ocorressem outros fenómenos que contribuem para a manter.

III Transições de fase da kriptonite

Quando uma esfera maciça rola no fundo de uma taça esférica, o seu movimento é periódico, isto é, o sentido dos seus movimentos de translação e rotação inverte-se periodicamente. Se a esfera for oca e a cavidade interior estiver preenchida com um líquido viscoso, o seu movimento é bem mais complicado. Pode-se no entanto recorrer a um modelo simplificado desta última situação para obter uma descrição aproximada do movimento da bola quando está cheia de líquido.

Suponha-se então que a bola, de raio r , possui uma casca de massa m , muito fina mas rígida e que no seu interior existe uma substância líquida de massa M , que designaremos por kriptonite. A kriptonite é um material especial e possui algumas propriedades únicas. Em particular, quando no estado líquido comporta-se como um fluido perfeito (sem qualquer viscosidade), e, em resposta a algumas influências externas especiais (como um campo eléctrico, por exemplo) transita instantaneamente para o estado sólido, mantendo o volume constante. Assim que o agente externo desaparece, a kriptonite retorna imediatamente ao estado líquido. Os agentes externos responsáveis por esta transição de fase não originam qualquer força ou torque na esfera. A bola está totalmente preenchida com kriptonite e é colocada a rolar, sem deslizar, no fundo de uma taça esférica de raio $R > r$, como mostra a figura.

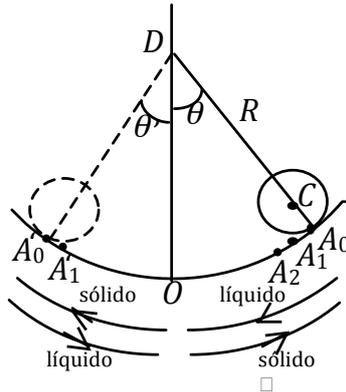


Figura 3: A bola de kriptonite e a taça.

Considerando que o movimento da bola se dá apenas no plano vertical (isto é, o plano da figura) estudar o movimento da bola nos seguintes 3 casos:

1. A kriptonite está no estado sólido e contacta com as paredes internas da bola de tal

maneira que se pode considerar que a bola e toda a kriptonite formam um corpo rígido único de raio r . Há, no entanto, uma descontinuidade na densidade do material na interface entre a kriptonite e a casca esférica de massa m , visto que a densidade da kriptonite é substancialmente diferente da do material de que é feita a camada esférica que a envolve.

- (a) Determinar o momento de inércia de uma fina casca esférica em relação a um eixo que passa pelo seu centro. Sugestões: i) uma casca esférica de raio r de um material de densidade ρ pode ser obtida ‘escavando’ uma cavidade de raio $r - \epsilon$ ($\epsilon \ll r$) no interior de uma esfera maciça de raio r desse material; ii) $(a - x)^n \approx a^n - na^{n-1}x$, quando $x \ll a$.
- (b) Determinar o momento de inércia da bola (casca esférica e kriptonite sólida) em relação a um eixo que passa pelo seu centro.
- (c) Determinar o período T_1 do movimento da bola quando oscila ligeiramente, sem deslizar, no fundo da taça esférica.

2. A kriptonite está no estado líquido, comportando-se como um fluido perfeito, isto é, sem que haja atrito entre o fluido e as paredes internas da bola.

- (a) Determinar o período T_2 do movimento da bola cheia de líquido quando oscila ligeiramente, sem deslizar, no fundo da taça esférica.

3. A kriptonite transita entre o estado sólido e o líquido enquanto oscila.

Supor que, no instante $t = 0$, a bola está em repouso e que a linha CD faz um ângulo $\theta_0 \ll 1$ rad com a vertical (linha OD , sendo D o centro de curvatura da taça esférica). O ponto de contacto da bola com a taça é, neste instante, o ponto A_0 (ver figura). A bola é então largada e começa a rolar para a esquerda, em direcção ao ponto de equilíbrio, O . Durante esta fase do movimento a kriptonite está no estado líquido, mas assim que a bola passa pelo ponto O é ligado um campo eléctrico e a kriptonite fica imediatamente sólida e ‘cola-se’ à parede interna da bola. A bola atinge o ponto A'_0 com velocidade nula e, nesse instante, o campo eléctrico é desligado, regressando a kriptonite ao estado líquido. A bola começa a rolar para a direita e, quando passa de novo pelo ponto O , o campo eléctrico é ligado mais uma vez, mantendo-se ligado até que a bola fique de novo em repouso momentâneo, desta feita no ponto A_1 . Nessa altura a kriptonite volta ao estado líquido pois o campo é mais uma vez desligado. Este ciclo repete-se indefinidamente, e a bola oscila periodicamente em torno do fundo da taça esférica, embora a amplitude desta oscilação vá decrescendo com o passar do tempo. No decurso deste movimento não há qualquer deslizamento da bola no fundo da taça, isto é, a bola está sempre a rolar sem deslizar, mesmo nos instantes em que se dão as transições de fase.

- (a) Determinar o período T_3 do movimento da bola nestas condições.
- (b) Determinar a amplitude angular do movimento. A amplitude angular é medida pelo ângulo θ_n que a linha CD faz com a vertical quando a bola atinge pela n -ésima vez o extremo direito da sua oscilação, A_n .