

Olimpíadas de Física 2007

Seleccção para as provas internacionais

Prova Teórica

Sociedade Portuguesa de Física

4/Maio/2007

Prova Teórica

Duração da prova: 4h

I Vários tópicos

1. N partículas carregadas com idêntica carga eléctrica q estão dispostas uniformemente ao longo de uma circunferência de raio R . Suponha que remove uma das partículas e a coloca no centro da circunferência, sem que a distribuição das outras partículas seja alterada. Qual é o modulo da força a que fica sujeita essa partícula?
2. Um super-projectil é lançado com velocidade inicial $\vec{v} = v_\theta \hat{e}_\theta + v_r \hat{e}_r$ da superfície da Terra, em que v_θ é a componente horizontal da velocidade e v_r a componente vertical. A velocidade inicial é suficientemente elevada para que a altura máxima h atingida pelo projectil não seja desprezável face ao raio da Terra, R . Desprezando a resistência do ar e a rotação da Terra, calcular h . No caso de a componente horizontal da velocidade ser nula, mostrar que do resultado geral se obtém a expressão $h \sim \frac{v_r^2}{2g}$, se $h \ll R$. Considerar que a massa da Terra é muito superior à do projectil.
3. A 1ª corda de uma guitarra clássica vibra no modo fundamental com a frequência de 329,63 Hz (nota Mi). A corda é feita de um fio de nylon (densidade 1015 kg/m³) com 0,69 mm de espessura. O comprimento da corda da guitarra é de 648 mm. Qual deve ser a tensão do fio, em kgf, para se obter essa frequência quando a corda é dedilhada? Qual é a velocidade de propagação do som na corda e como se compara com a velocidade de propagação do som no ar?
4. Num motor diesel de injeccção directa uma pequena porção de combustível é misturada com ar e injectada num cilindro onde a mistura gasosa é comprimida rapidamente, por movimento de um pistão, para um volume final v_f que é uma fracção do volume inicial, v_i . A razão $r = v_i/v_f$ é denominada taxa de compressão do motor. Sabendo que a temperatura da ignição do gasóleo é 800°C, calcular o valor mínimo da taxa de compressão do motor para que o gasóleo entre em ignição e a pressão final na compressão. Qual é a energia que é necessário dispendir para comprimir o gás até à ignição num motor de 4 cilindros idênticos com uma cilindrada de 1600 cm³?
5. Considerar a produção de um par protão-antiprotão de acordo com a reacção



Admitindo que um dos protões está inicialmente em repouso, calcular a energia cinética mínima que deverá ter o protão incidente para que ocorra a reacção. Nota: esta energia cinética mínima corresponde à situação em que os produtos da reacção ficam em repouso no sistema do centro de massa.

II Electromagnetismo

- Uma partícula não relativista de massa m e carga q , move-se no plano xy sujeita a um campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$. Quando uma partícula carregada é acelerada perde energia sob a forma de radiação. Esse processo pode ser quantificado através da fórmula de Larmor, $\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$, em que a é o módulo da aceleração da partícula e E a energia emitida na forma de radiação.
 - Inicialmente e desprezando a radiação emitida, a partícula move-se com velocidade de valor v_0 em movimento circular uniforme. Determinar o raio R_0 da órbita em função dos parâmetros fornecidos.
 - Mostrar agora que o raio da órbita pode ser descrito aproximadamente por $R(t) = R_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, em que $\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 m^3 c^3}{q^4 B^2}$. Para tal, tratar a perda de energia cinética através de radiação como uma pequena perturbação à órbita circular.
 - Calcular a energia total irradiada e mostrar que esta é igual a $\frac{1}{2}mv_0^2$.
- A figura seguinte mostra um trilho de carris condutores, de resistência desprezável, num plano horizontal, perpendicular a um campo magnético \vec{B} . A distância entre os carris é l . Sobre esses carris pode deslocar-se, sem atrito, uma barra metálica, de massa m , e resistência R . Numa das extremidades os carris estão ligados a um condensador de capacidade C . Inicialmente o interruptor S está virado para a esquerda, pelo que o condensador é carregado por uma bateria ficando à tensão inicial U_0 ; de seguida o interruptor S é ligado para a direita. Observa-se então que a barra metálica começa a deslocar-se para a direita a partir desse instante, atingindo uma velocidade considerável, pelo que este dispositivo pode considerar-se um “canhão electromagnético”.

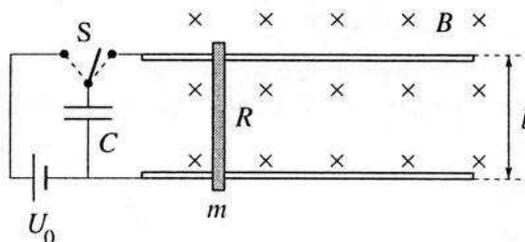


Figura 1: Canhão electromagnético.

- Escrever as equações do movimento para a barra e mostrar que esta atinge, passado algum tempo, uma velocidade máxima, v_{\max} . Obter uma expressão para essa velocidade máxima em função dos dados do problema.
- Obter as expressões para a energia final da barra e a energia que resta armazenada no condensador, quando a barra atinge a velocidade máxima. Como se poderia otimizar este “canhão electromagnético” para que a maior fracção possível da energia inicial armazenada no condensador fosse transferida para o projectil (barra)?

Massa da Terra	$M = 5,98 \times 10^{24}$ kg
Massa da Lua	$M_L = 7,3 \times 10^{22}$ kg
Raio da Terra	$R = 6,37 \times 10^6$ m
Distância Terra-Lua	$L = 3,84 \times 10^8$ m
Constante gravitacional	$G = 6,67 \times 10^{-11}$ m ³ kg ⁻¹ s ⁻²

Tabela 1: Dados relevantes do sistema Terra-Lua.

III Dias longos, noites escuras

Quando um corpo se move num campo gravítico não-uniforme, fica sujeito a forças de maré. Estas forças podem ser de tal modo fortes que levem à destruição do corpo. Esta é, aliás, uma hipótese para explicar a formação dos anéis de Saturno. Neste problema iremos estudar o efeito da Lua nas marés dos oceanos da Terra e na duração do dia terrestre.

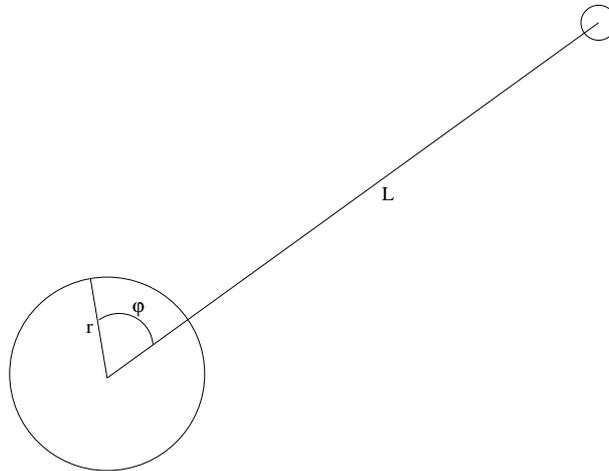


Figura 2: Sistema Terra-Lua

1. Considerar que a Terra e a Lua formam um sistema isolado, isto é, que se podem desprezar a atracção gravitacional do Sol e dos outros corpos do sistema solar. Supor que a distância da Terra à Lua é constante, que a Terra está uniformemente coberta por um oceano e que a sua atracção gravitacional pode ser determinada considerando que toda a massa está concentrada no centro da Terra. Supor ainda que os efeitos dinâmicos da rotação da Terra podem ser ignorados.
 - (a) A Terra e a Lua rodam com velocidade angular ω em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua. Qual é a distância ℓ do centro de massa do sistema ao centro da Terra?
 - (b) Determinar o valor de ω .
 - (c) Nas condições do problema, e do ponto de vista de um observador que roda solidário com a Lua em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua, as forças que actuam sobre uma partícula de massa m (uma gota de água à superfície do oceano, por exemplo) são: o campo gravítico terrestre, a atracção gravitacional

da Lua e a força centrífuga devido ao movimento de rotação da Terra em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua. Para este observador a superfície líquida da Terra é estática. Obviamente, para um observador à superfície da Terra (que roda sobre si própria!), a superfície líquida não é estática, havendo marés. Num ponto de coordenadas (r, φ) à superfície no equador da Terra (ver figura) a energia potencial de uma massa m pode ser escrita como

$$V(r, \varphi) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{GMm}{r} - \frac{GM_L m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

Determinar a altura $h = r - R$ da maré no ponto de coordenadas (r, φ) . Sugestão: fazer as aproximações necessárias, recordando que $1/r \approx 1/R - h/R^2$ e que $r^2 \approx R^2 + 2Rh$.

- (d) Qual é a amplitude máxima das marés de acordo com este modelo? Quantas marés altas existem por dia? Os resultados do modelo estão em bom acordo com os valores obtidos em pontos no meio do oceano.
2. A fricção que as marés exercem sobre a Terra leva a que a Lua esteja lentamente a afastar-se da Terra. A longo prazo este afastamento levará a Lua a ficar estacionária sobre um ponto da Terra (metade do planeta nunca verá a Lua!). Considerando que o sistema Terra-Lua é um sistema isolado, o momento total das forças externas ao sistema é nulo (na realidade é, em média, não nulo mas muito pequeno). No que se segue, desprezar a rotação da Lua em torno de si própria e assumir que o eixo de rotação da Terra é paralelo ao eixo de rotação da Lua em torno da Terra.
- (a) Obter a energia total do sistema Terra-Lua num sistema de referência em que a Terra esteja em repouso na origem.
- (b) Determinar o momento angular total da Lua apenas em função da distância da Terra à Lua.
- (c) A duração do dia terrestre aumenta $4,4 \times 10^{-8}$ s por dia. Estimar o aumento diário da distância Terra-Lua.
- (d) Escrever a energia total do sistema Terra-Lua apenas em função do momento angular da Terra.
- (e) A variação da duração do dia terrestre é devida, em parte, ao atrito das marés¹. Havendo uma força dissipativa, a energia total do sistema não se conserva. Esta força é também responsável pela variação do momento angular da Terra. Quando a separação entre a Terra e a Lua atingir um valor crítico esta força deixará de existir. Assumindo que o efeito da fricção das marés se manifesta apenas na variação do momento angular da Terra e da Lua, qual é este valor crítico? Qual será a relação entre a velocidade orbital da Lua e a velocidade de rotação da Terra nessa altura?

¹As marés não têm efeito apenas no mar. O núcleo da Terra tem uma parte líquida e mesmo as camadas sólidas da Terra não são totalmente rígidas.