Olimpíadas de Física 2007

Selecção para as provas internacionais

Resolução da Prova Teórica

Sociedade Portuguesa de Física

4/Maio/2007

I Vários tópicos

1. N partículas carregadas com idêntica carga eléctrica q estão dispostas uniformemente ao longo de uma circunferência de raio R . Suponha que remove uma das partículas e a coloca no centro da circunferência, sem que a distribuição das outras partículas seja alterada. Qual é o modulo da força a que fica sujeita essa partícula?

   Para uma distribuição simétrica de cargas, $\vec{E} = 0$ no centro da circunferência. O campo eléctrico nesse ponto quando se retira uma carga pode ser obtido usando o princípio da sobreposição. Para tal, considera-se a situação com uma distribuição simétrica de cargas sobrepondo a carga $-q$ sobre a carga q que seria removida, simulando assim a situação pretendida. Desta forma, é evidente que o campo eléctrico no centro da circunferência terá o módulo

   $$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

   e o módulo da força a que fica sujeita a partícula que retiramos quando ela é colocada no centro da circunferência é

   $$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R^2}$$

2. Um super-projéctil é lançado com velocidade inicial $\vec{v} = v_\theta \hat{e}_\theta + v_r \hat{e}_r$ da superfície da Terra, em que v_θ é a componente horizontal da velocidade e v_r a componente vertical. A velocidade inicial é suficientemente elevada para que a altura máxima h atingida pelo projéctil não seja desprezável face ao raio da Terra, R. Desprezando a resistência do ar e a rotação da Terra, calcular h. No caso de a componente horizontal da velocidade ser nula, mostrar que do resultado geral se obtém a expressão $h \sim \frac{v_r^2}{2g}$, se $h << R$. Considerar que a massa da Terra é muito superior à do projéctil.

   Designando por v'_θ a componente horizontal da velocidade quando a altura é máxima e sabendo que a componente radial deste vector é nula nesta situação, pela conservação de energia e momento angular, obtém-se as seguintes equações:

   $$-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}m\left(v_\theta^2 + v_r^2\right) = -G\frac{Mm}{R+h} + \frac{1}{2}m{v'_\theta}^2$$

   e

   $$mRv_\theta = m(R+h)v'_\theta.$$

   Resolvendo o sistema de forma a obter h em função dos parâmetros fornecidos,

   $$h = \frac{v_\theta^2 R^2}{GM + \sqrt{G^2M^2 - 2R^2v_\theta^2\left(\frac{GM}{R} - \frac{v_\theta^2+v_r^2}{2}\right)}} - R.$$

   Se $v_\theta = 0$, o movimento é vertical podendo resolvido utilizando a conservação de energia mecânica,

   $$-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_r^2 = -\frac{GMm}{R+h} \Leftrightarrow GM\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = -\frac{v_r^2}{2}.$$

Pela aproximação em série de Taylor, $\frac{1}{R+h} \sim \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2}$. Aplicando esta aproximação na equação da conservação de energia,

$$GM\left(\frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} - \frac{1}{R}\right) \sim -\frac{v_r^2}{2} \Leftrightarrow h \sim \frac{R^2 v_r^2}{2GM} = \frac{v_r^2}{2g}.$$

3. A 1ª corda de uma guitarra clássica vibra no modo fundamental com a frequência de 329,63 Hz (nota Mi). A corda é feita de um fio de nylon (densidade 1015 kg/m^3) com 0,69 mm de espessura. O comprimento da corda da guitarra é de 648 mm. Qual deve ser a tensão do fio, em kgf, para se obter essa frequência quando a corda é dedilhada? Qual é a velocidade de propagação do som na corda e como se compara com a velocidade de propagação do som no ar?

   O 1º harmónico da nota Mi corresponde a uma onda estacionária de comprimento de onda $\lambda = 2L$. Por outro lado, a velocidade v de propagação do som na corda, a tensão T da corda e a sua densidade linear de massa, μ, estão relacionados pela expressão

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

   A velocidade de propagação do som é $v = \lambda f = 2Lf = 427$ m/s. A densidade linear μ é

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{m}{S}\frac{S}{L} = \frac{m}{V}S = \rho S,$$

   Onde $S = \pi(d/2)^2$ é a secção da corda e ρ a densidade volúmica do nylon. Substituindo os valores numéricos do enunciado obtemos $\mu = 3,79 \times 10^{-4}$ kg/m e $T = v^2\mu = 69,2 \text{ N} = 7,1 \text{ kgf}$.

4. Num motor diesel de injecção directa uma pequena porção de combustível é misturada com ar e injectada num cilindro onde a mistura gasosa é comprimida rapidamente, por movimento de um pistão, para um volume final v_f que é uma fracção do volume inicial, v_i. A razão $r = v_\mathrm{i}/v_\mathrm{f}$ é denominada taxa de compressão do motor. Sabendo que a temperatura da ignição do gasóleo é 800°C, calcular o valor mínimo da taxa de compressão do motor para que o gasóleo entre em ignição e a pressão final na compressão. Qual é a energia que é necessário dispender para comprimir o gás até à ignição num motor de 4 cilindros idênticos com uma cilindrada de 1600 cm^3?

   A compressão do ar no pistão é, em boa aproximação, adiabática (por ser muito rápida), pelo que a válida a relação

$$PV^\gamma = K,$$

   onde K é uma constante. Para o ar, que é constituído principalmente por gases diatómicos, $\gamma = 1,403$. Considerando a pressão inicial, P_i, igual a 1 atm ou seja, $P_\mathrm{i} = 1,01 \times 10^5$ N/m^2 e o volume inicial de 1600 cm^3 a constante K para o ar contido num cilindro tem o valor $K = 304$. Considerando o ar um gás ideal, podemos usar a relação $PV = nRT$, para relacionarmos os volumes inicial e final com as temperaturas inicial e final do ar:

$$\frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{i}} = \left(\frac{V_\mathrm{i}}{V_\mathrm{f}}\right)^{\gamma-1} = r^{\gamma-1},$$

onde r é a taxa de compressão do motor. Substituindo valores e resolvendo a equação acima em ordem a r obtemos $r = 24$

Calculemos agora o trabalho realizado na compressão de um ciclindro. Partindo da definição,

$$W = \int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}} P dV,$$

e usando a equação do processo adiabático $PV^\gamma = K$, obtemos a seguinte expressão para o trabalho:

$$W = K\left(\frac{V_\mathrm{f}^{1-\gamma} - V_\mathrm{i}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) = -1,05 \times 10^4 \text{ J}$$

O sinal negativo do trabalho significa que temos de realizar trabalho para comprimir o gás.A energia necessária para comprimir os quatro cilindros é o quádruplo do trabalho que é necessário para comprimir um cilindro, $1,05 \times 10^4$ J.

5. Considerar a produção de um par protão-antiprotão de acordo com a reacção

$$p + p \longrightarrow p + p + p + p^-$$

Admitindo que um dos protões está inicialmente em repouso, calcular a energia cinética mínima que deverá ter o protão incidente para que ocorra a reacção. Nota: esta energia cinética mínima corresponde à situação em que os produtos da reacção ficam em repouso no sistema do centro de massa.

A energia de uma partícula relativista de massa em repouso m e momento linear p é $\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. Os antiprotões têm a mesma massa em repouso, m, dos protões. A energia total das partículas resultantes da colisão é mínima quando estiverem paradas no referencial do centro de massa do sistema. Nesta situação as quatro partículas podem ser consideradas equivalentes a uma partícula única de massa $4m$ e cuja momento linear é igual ao momento linear inicial do protão. A conservação da energia impõe

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + (4m)^2c^4}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta equação obtemos $p = sqrt48mc$ e $E_p = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = 7mc^2$. Assim, para que esta reacção ocorra, a energia cinética mínima do protão incidente é $E_p - mc^2 = 6mc^2 \sim 6$ GeV.

II Electromagnetismo

1. Uma partícula não relativista de massa m e carga q, move-se no plano xy sujeita a um campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$. Quando uma partícula carregada é acelerada perde energia sob a forma de radiação. Esse processo pode ser quantificado através da fórmula de Larmor, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0c^3}$, em que a é o módulo da aceleração da partícula e E a energia emitida na forma de radiação.

   (a) Inicialmente e desprezando a radiação emitida, a partícula move-se com velocidade de valor v_0 em movimento circular uniforme. Determinar o raio R_0 da órbita em função dos parâmetros fornecidos.

Como o movimento é circular, a força de Lorentz actua como força centrípeta, pelo que

$$F = qv_0B \Leftrightarrow m\frac{v_0^2}{R_0} = qv_0B \Leftrightarrow R_0 = \frac{mv_0}{qB}$$

(b) Mostrar agora que o raio da órbita pode ser descrito aproximadamente por $R(t) = R_0e^{-\frac{t}{\tau}}$, em que $\tau = \frac{6\pi\epsilon_0 m^3c^3}{q^4B^2}$. Para tal, tratar a perda de energia cinética através de radiação como uma pequena perturbação à órbita circular.

A energia cinética E_c da partícula vai diminuindo à medida que emite radiação: assim,

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0c^3} = -\frac{q^2v^4}{6\pi\epsilon_0c^3R^2}$$

Da alínea anterior $v = \frac{RqB}{m}$, o que permite obter a seguinte relação:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\frac{R^2q^2B^2}{m^2}\right) = -\frac{q^6R^2B^4}{6\pi\epsilon_0m^4c^3} \Leftrightarrow R\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -\frac{q^4R^2B^2}{6\pi\epsilon_0m^3c^3},$$

ou ainda

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -\frac{q^4B^2}{6\pi\epsilon_0m^3c^3}R.$$

Esta equação é semelhante à equação da descarga de um condensador; por analogia, a solução desta equação é

$$R(t) = R_0e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{6\pi\epsilon_0m^3c^3}{q^4B^2}$$

(c) Calcular a energia total irradiada e mostrar que esta é igual a $\frac{1}{2}mv_0^2$.

A potência da radiação emitida é dada pela fórmula de Larmor,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0c^3} = \frac{q^6R^2B^4}{6\pi\epsilon_0m^4c^3} = \frac{q^6B^4}{6\pi\epsilon_0m^4c^3}R_0^2e^{-2\frac{t}{\tau}}$$

Integrando, obtemos a energia total radiada pela partícula:

$$E = \frac{q^6R_0^2B^4}{6\pi\epsilon_0m^4c^3}\int_0^{+\infty} e^{-2\frac{t}{\tau}}dt = \frac{q^6R_0^2B^4}{6\pi\epsilon_0m^4c^3}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}\frac{R_0^2B^2q^2}{m} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Verifica-se assim que toda a energia cinética inicial da partícula é perdida sob a forma de radiação.

2. A figura seguinte mostra um trilho de carris condutores, de resistência desprezável, num plano horizontal, perpendicular a um campo magnético $\vec{B}$. A distância entre os carris é l. Sobre esses carris pode deslocar-se, sem atrito, uma barra metálica, de massa m, e resistência R. Numa das extremidades os carris estão ligados a um condensador de capacidade C. Inicialmente o interruptor S está virado para a esquerda, pelo que o condensador é carregado por uma bateria ficando à tensão inicial U_0; de seguida o interruptor S é ligado para a direita. Observa-se então que a barra metálica começa a deslocar-se para a direita a partir desse instante, atingindo uma velocidade considerável, pelo que este dispositivo pode considerar-se um "canhão electromagnético".

(a) Escrever as equações do movimento para a barra e mostrar que esta atinge, passado algum tempo, uma velocidade máxima, $v_{\rm max}$. Obter uma expressão para essa velocidade máxima em função dos dados do problema.

Quando se liga o condensador, começa a fluir na circuito uma corrente $I = U_0/R$. Esta corrente, que circula na barra, origina uma força $F = BlI$ que actua sobre a barra e provoca nela uma aceleração $a = BlU_0/mR$. Mas o movimento da barra provoca um aumento do fluxo magnético no circuito e, de acordo com a lei de Lenz, induz uma voltagem no circuito que se opõe à variação do fluxo, diminuindo a corrente, opondo-se, portanto, à descarga do condensador. Assim, à medida que o condensador descarrega, diminui a tensão entre as suas armaduras e, simultaneamente, a tensão induzida pela variação do fluxo magnético aumenta, até uma altura em que as duas tensões se compensam. Nesta altura cessa a corrente, e a barra continua o seu movimento com a velocidade máxima dada pela expressão

$$Blv_{\rm max} = \frac{Q_{\rm min}}{C}$$

A equação do movimento da barra é

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = BlI = -Bl\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Integrando esta equação obtemos

$$mv_{\rm max} = Bl\,(Q_0 - Q_{\rm min})$$

Podemos assim concluir, destas equações, que

$$v_{\rm max} = \frac{BlCU_0}{m + B^2l^2C}, \quad Q_{\rm min} = \frac{B^2L^2C^2U_0}{m + B^2l^2C}$$

(b) Obter as expressões para a energia final da barra e a energia que resta armazenada no condensador, quando a barra atinge a velocidade máxima. Como se poderia optimizar este "canhão electromagnético" para que a maior fracção possível da energia inicial armazenada no condensador fosse transferida para o projéctil (barra)?

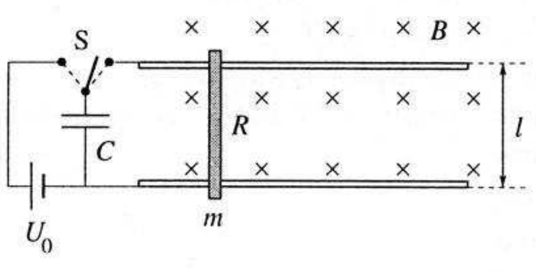

Figura 1: Canhão electromagnético.

Massa da Terra	$M = 5,98 \times 10^{24}$ kg
Massa da Lua	$M_L = 7,3 \times 10^{22}$ kg
Raio da Terra	$R = 6,37 \times 10^{6}$ m
Distância Terra-Lua	$L = 3,84 \times 10^{8}$ m
Constante gravitacional	$G = 6,67 \times 10^{-11}$ $\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$

Tabela 1: Dados relevantes do sistema Terra-Lua.

As equações anteriores mostram que a velocidade máxima da barra é directamente proporcional a U_0, pelo que a energia final da barra é proporcional a U_0^2. A eficiência do "canhão electromagnético" é medida pela fracção η da energia inicialmente armazenada no condensador que se transforma em energia cinética da barra:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}mv_{\max}^2}{\frac{1}{2}CU_0^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{m}}{Bl\sqrt{C}} + \frac{Bl\sqrt{C}}{\sqrt{m}}\right)^2}$$

Como o produto dos termos no interior do parêntesis é 1, e como para quaisquer dois números positivos a e b se verifica a desigualdade $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$, então o denominador da fracção acima não pode ser inferior a $2^2 = 4$. Assim, a eficiência máxima do canhão electromagnético é de 25%, sendo a situação óptima a que verifica a condição $m = CB^2l^2$. É interessante verificar que, nesta situação, 1/4 da energia inicial fica no condensador (que fica com metade da carga inicial), 1/4 da energia é transformada em energia cinética da barra e 1/2 da energia inicial é dissipada como calor na barra por efeito Joule!

III Dias longos, noites escuras

Quando um corpo se move num campo gravítico não-uniforme, fica sujeito a forças de maré. Estas forças podem ser de tal modo fortes que levem à destruição do corpo. Esta é, aliás, uma hipótese para explicar a formação dos anéis de Saturno. Neste problema iremos estudar o efeito da Lua nas marés dos oceanos da Terra e na duração do dia terrestre.

1. Considerar que a Terra e a Lua formam um sistema isolado, isto é, que se podem desprezar a atracção gravitacional do Sol e dos outros corpos do sistema solar. Supor que a distância da Terra à Lua é constante, que a Terra está uniformemente coberta por um oceano e que a sua atracção gravitacional pode ser determinada considerando que toda a massa está concentrada no centro da Terra. Supor ainda que os efeitos dinâmicos da rotação da Terra podem ser ignorados.

   (a) A Terra e a Lua rodam com velocidade angular ω em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua. Qual é a distância ℓ do centro de massa do sistema ao centro da Terra?

   Usando um sistema de referência com origem no centro da Terra, o centro de massa do sistema Terra-Lua tem coordenada radial

$$(M + M_L)\ell = M_L L \Leftrightarrow \ell = \frac{M_L}{M + M_L} L \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ell = \frac{7,3 \times 10^{22}}{5,98 \times 10^{24} + 7,3 \times 10^{22}} \times 3,84 \times 10^8 = 4,63 \times 10^6 \text{ m}$$

o que significa que está no interior da Terra!

(b) Determinar o valor de ω.

Nas condições do problema, a única força que actua sobre a Terra ou a Lua é a sua mútua atracção. Esta força é por isso a responsável pela aceleração centrípeta da Terra ou da Lua. Então, para a Terra:

$$M\omega^2\ell = G\frac{MM_L}{L^2} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM_L}{L^2\ell}} = \sqrt{\frac{G\,(M + M_L)}{L^3}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times (5,98 \times 10^{24} + 7,3 \times 10^{22})}{(3,84 \times 10^8)^3}} = 2,67 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$$

o que corresponde a um período de 27 dias, 5 horas e 37 minutos.

(c) Nas condições do problema, e do ponto de vista de um observador que roda solidário com a Lua em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua, as forças que actuam sobre uma partícula de massa m (uma gota de água à superfície do oceano, por exemplo) são: o campo gravítico terrestre, a atracção gravitacional da Lua e a força centrífuga devido ao movimento de rotação da Terra em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua. Para este observador a superfície líquida da Terra é estática. Obviamente, para um observador à superfície da Terra (que roda sobre si própria!), a superfície líquida não é estática, havendo marés. Num ponto de coordenadas (r, φ) à superfície no equador da Terra (ver figura) a energia potencial de uma massa m pode ser escrita como

$$V(r,\varphi) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{GMm}{r} - \frac{GM_L m r^2}{2L^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right) .$$

Determinar a altura $h = r - R$ da maré no ponto de coordenadas (r, φ). Sugestão: fazer as aproximações necessárias, recordando que $1/r \approx 1/R - h/R^2$ e que $r^2 \approx R^2 + 2Rh$.

Para que a superfície da água esteja em equilíbrio não pode haver forças na 'horizontal'. Isto é equivalente a dizer que a superfície livre da água é uma linha equipotencial. Então

$$
\begin{aligned}
V(r,\varphi) = \text{constante} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{GMm}{r} - \frac{GM_L m r^2}{2L^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right) = \text{cte} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow -\frac{1}{2}m\omega^2\left(R^2 + 2Rh\right) - \frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R^2}h - \frac{GM_L m r^2}{2L^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right) = \text{cte} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left(\frac{M}{R^2} - \frac{R\left(M + M_L\right)}{L^3}\right) Gmh - \frac{GM_L m r^2}{2L^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right) = \text{cte} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left(1 - \left(\frac{R}{L}\right)^3 \frac{M + M_L}{M}\right)\frac{GMm}{R^2}h - \frac{GM_L m r^2}{2L^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right) = \text{cte} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{GMm}{R^2}h - \frac{GM_L m r^2}{2L^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right) = \text{cte} \Rightarrow \\
\Rightarrow h = \frac{M_L R^2 r^2}{2ML^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right) \approx \frac{M_L R^4}{2ML^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right)
\end{aligned}
$$

que é a equação que define o perfil da superfície de água.

(d) Qual é a amplitude máxima das marés de acordo com este modelo? Quantas marés altas existem por dia? Os resultados do modelo estão em bom acordo com os valores obtidos em pontos no meio do oceano.

O valor máximo da expressão anterior obtém-se para $\varphi = 0, \pi$ e o mínimo para $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$. Então a amplitude máxima da maré é:

$$h_{\max} - h_{\min} = \frac{3M_L R^4}{2ML^3} \approx 0,54 \text{ m}\,.$$

Havendo dois mínimos e dois máximos para a altura da maré, a rotação da Terra levará a que qualquer ponto à superfície 'passe' por esses máximos e mínimos ao longo do dia, originando duas marés altas e duas marés baixas.

2. A fricção que as marés exercem sobre a Terra leva a que a Lua se esteja lentamente a afastar da Terra. A longo prazo este afastamento levará a Lua a ficar estacionária sobre um ponto da Terra (metade do planeta nunca verá a Lua!). Considerando que o sistema Terra-Lua é um sistema isolado, o momento total das forças externas ao sistema é nulo (na realidade é, em média, não nulo mas muito pequeno). No que se segue, desprezar a rotação da Lua em torno de si própria e assumir que o eixo de rotação da Terra é paralelo ao eixo de rotação da Lua em torno da Terra. Assumir ainda que a Lua roda em torno da Terra no mesmo sentido em que esta roda sobre si própria.

   (a) Obter a energia total do sistema Terra-Lua num sistema de referência em que a Terra esteja em repouso na origem.

   Neste referencial a Terra não possui movimento de translacção, por isso a energia total do sistema é a soma da energia cinética de rotação da Terra, da energia cinética de translacção da Lua e da energia potencial gravítica do sistema. A energia cinética de rotação da Lua é desprezada visto se ignorar a rotação da

Lua em torno do seu eixo (de qualquer modo, dada a diferença de massas, esta energia seria sempre muito menor que qualquer dos outros termos). Então,

$$E = \frac{1}{2} M_L v^2 - \frac{G M_L M}{L} + \frac{1}{2} I \Omega^2$$

onde v é a velocidade de translacção da Lua, Ω a velocidade angular de rotação da Terra em torno de si própria e I o momento de inércia da Terra. É fácil relacionar v e L, visto que

$$v = \omega L = \sqrt{\frac{G\,(M + M_L)}{L^3}} L = \sqrt{\frac{G\,(M + M_L)}{L}}\,.$$

Então,

$$E = \frac{1}{2} M_L \frac{G\,(M + M_L)}{L} - \frac{G M_L M}{L} + \frac{1}{2} I \Omega^2 \approx -\frac{G M_L M}{2L} + \frac{1}{2} I \Omega^2\,.$$

(b) Determinar o momento angular total da Lua apenas em função da distância da Terra à Lua.

O momento angular total da Lua é apenas o seu momento angular orbital (despreza-se a rotação da Lua). Então, calculando-o em relação ao centro da Terra, vem:

$$\mathcal{L} = M_L v L = M_L \sqrt{\frac{G\,(M + M_L)}{L}} L \approx M_L \sqrt{G M L}\,.$$

(c) A duração do dia terrestre aumenta $4,4 \times 10^{-8}$ s por dia. Estimar o aumento diário da distância Terra-Lua.

Como não há momentos de força externos ao sistema, o momento angular do sistema Terra-Lua ($\mathcal{J}$) é constante. Para o obter, é necessário somar o momento angular da Lua em relação ao centro da Terra ($\mathcal{L}$, calculado na alínea anterior) e o momento angular associado à rotação da Terra sobre si própria ($\mathcal{S}$). Nas condições do problema, estes dois vectores possuem a mesma direcção, pois assume-se que os eixo de rotação são paralelos. Como os sentidos de rotação são os mesmos, os vectores também possuem o mesmo sentido, logo:

$$\mathcal{J} = \mathcal{L} + \mathcal{S} = M_L \sqrt{G M L} + I \Omega\,.$$

A taxa de variação do momento angular da Lua é:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = M_L \sqrt{G M} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{dL}{dt}\,,$$

logo

$$\frac{d\mathcal{L}/dt}{\mathcal{L}} = \frac{1}{2L} \frac{dL}{dt}\,.$$

Pode-se relacionar esta taxa de variação com a taxa de variação da velocidade de rotação da Terra visto o momento angular total se conservar:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} + \frac{d\mathcal{S}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{S}}{dt} = -\frac{d\mathcal{L}}{dt} \Leftrightarrow I \frac{d\Omega}{dt} = -\mathcal{L} \frac{1}{2L} \frac{dL}{dt}\,.$$

Ora, como o período de rotação da Terra (a duração do dia) é $T = 2\pi/\Omega$,

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2\pi}{T^2}\frac{dT}{dt}$$

donde

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{2LI}{M_L\sqrt{GML}}\frac{d\Omega}{dt} = \frac{4\pi I\sqrt{L}}{M_L\sqrt{GM}T^2}\frac{dT}{dt}\,.$$

Usando os valores actuais para L e T, obtemos $dL/dt = 9,6 \times 10^{-5}$ m/dia= $2,89$ mm/mês. Isto significa que a Lua se afasta 3,5 cm por ano da Terra (3,8 cm, de acordo com as medidas mais recentes). Como termo de comparação, a deriva dos continentes processa-se a uma velocidade média de 1–2 cm por ano.

(d) Escrever a energia total do sistema Terra-Lua apenas em função do momento angular da Terra.

Ora, já se sabe que

$$E \approx -\frac{GM_LM}{2L} + \frac{1}{2}I\Omega^2\,.$$

Por outro lado o momento angular da Terra é

$$\mathcal{S} = I\Omega$$

e o da Lua é

$$\mathcal{L} = M_L\sqrt{GML}\,.$$

Então,

$$E = -\frac{\mathcal{L}^2}{2M_LL^2} + \frac{\mathcal{S}^2}{2I} = -\frac{G^2M^2M_L^3}{2\mathcal{L}^2} + \frac{\mathcal{S}^2}{2I}\,,$$

que pode facilmente exprimir-se apenas em função de $\mathcal{S}$ recorrendo à conservação do momento angular total — $\mathcal{L} = \mathcal{J} - \mathcal{S}$:

$$E = -\frac{G^2M^2M_L^3}{2\left(\mathcal{J} - \mathcal{S}\right)^2} + \frac{\mathcal{S}^2}{2I}\,.$$

(e) A variação da duração do dia terrestre é devida, em parte, ao atrito das marés[1]. Havendo uma força dissipativa, a energia total do sistema não se conserva. Esta força é também responsável pela variação do momento angular da Terra. Quando a separação entre a Terra e a Lua atingir um valor crítico esta força deixará de existir. Assumindo que o efeito da fricção das marés se manifesta apenas na variação do momento angular da Terra e da Lua, qual é este valor crítico? Qual será a relação entre a velocidade orbital da Lua e a velocidade de rotação da Terra nessa altura?

A variação do momento angular da Terra (e correspondente variação do momento angular da Lua devido à conservação do momento angular total do sistema) implica que a energia total do sistema vai variar, como se pode constatar pela análise da expressão anterior. Pode-se considerar, na expressão da energia total do sistema, que a fricção das marés está "escondida" no momento angular. O

[1] As marés não têm efeito apenas no mar. O núcleo da Terra tem uma parte líquida e mesmo as camadas sólidas da Terra não são totalmente rígidas.

ponto de equilíbrio que se pretende encontrar deverá ser um extremo da energia total. Para o determinar, basta então minimizar a energia total em ordem ao momento angular da Lua (ou da Terra) mantendo $\mathcal{J}$ constante:

$$\left.\frac{dE}{d\mathcal{L}}\right|_{\mathcal{J}=\mathrm{cte}} = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{d}{d\mathcal{L}}\right|_{\mathcal{J}=\mathrm{cte}} \left(-\frac{G^2M^2M_L^3}{2\mathcal{L}^2} + \frac{\mathcal{S}^2}{2I}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{G^2M^2M_L^3}{\mathcal{L}^3} - \frac{\mathcal{S}}{I} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathcal{L}}{M_L L^2} = \Omega\,.$$

Esta igualdade mostra que os extremos da energia são obtidos quando as *velocidades de rotação da Terra sobre si própria e de rotação da Lua em torno da Terra forem iguais*, isto é, quando a Lua estiver estacionária sobre um ponto da Terra. A separação entre a Terra e a Lua nessa altura pode-se obter reparando que, em qualquer instante:

$$\Omega = \frac{\mathcal{J} - M_L\sqrt{GML}}{I}$$

e que, quando se atinge a co-rotação,

$$\Omega_\infty = \frac{\mathcal{L}_\infty}{M_L L_\infty^2} = \frac{\sqrt{GML_\infty}}{L_\infty^2}\,.$$

Então,

$$\frac{\mathcal{J} - M_L\sqrt{GML_\infty}}{I} = \frac{\sqrt{GML_\infty}}{L_\infty^2}$$

que é uma equação que se pode resolver, por exemplo, graficamente. O valor que se obtém para a separação Terra-Lua quando se atinge a co-rotação (utilizando o actual valor do momento angular total do sistema, $\mathcal{J}$) é:

$$L_\infty = 5,972 \times 10^8 \text{ m} = 1,56L\,.$$