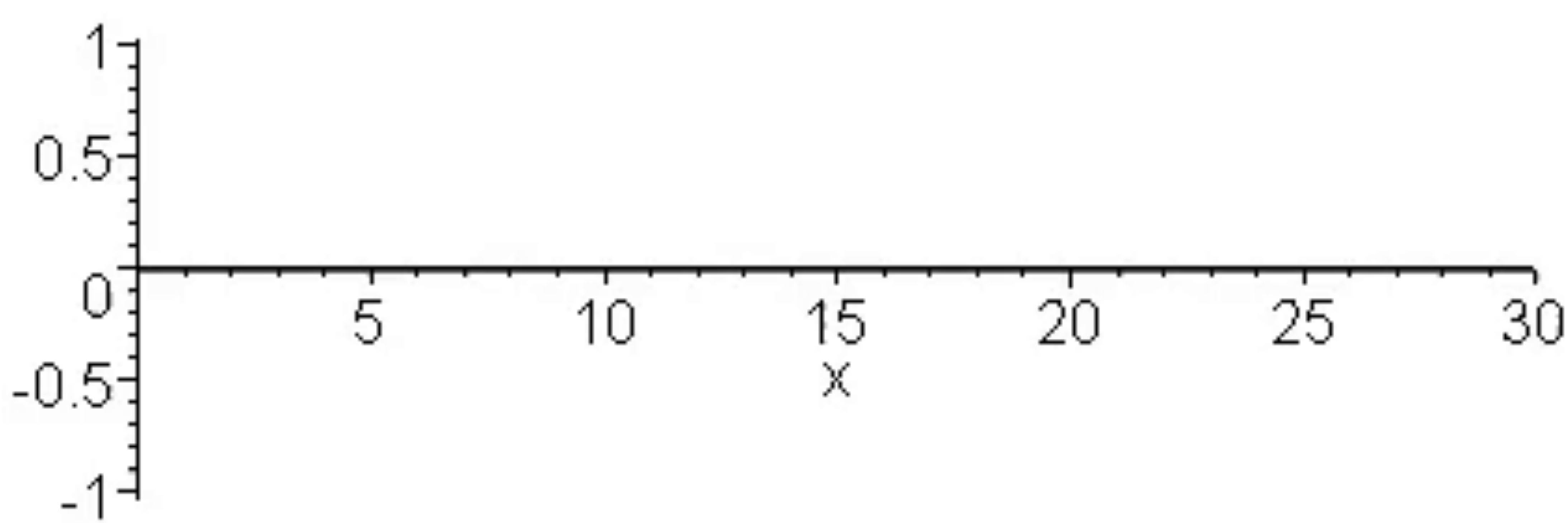
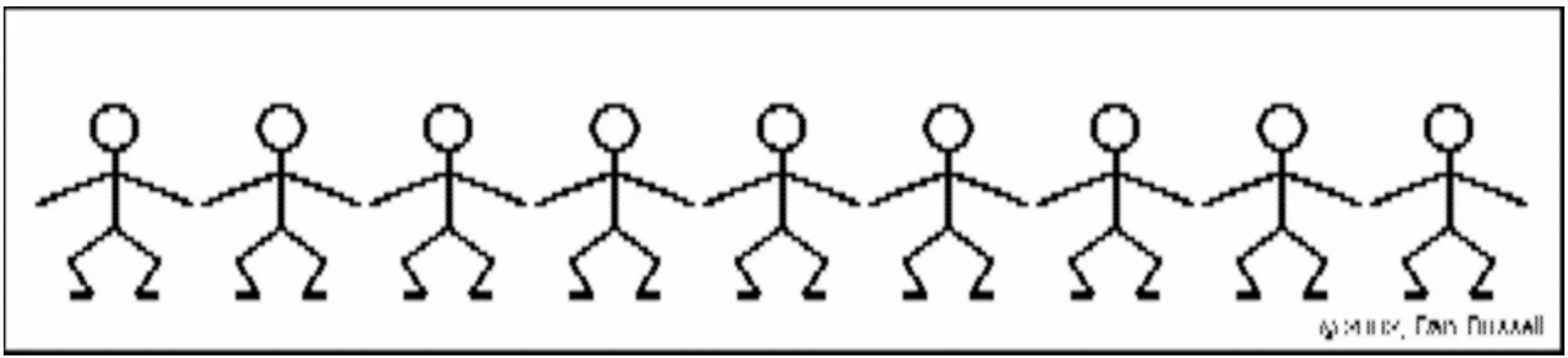
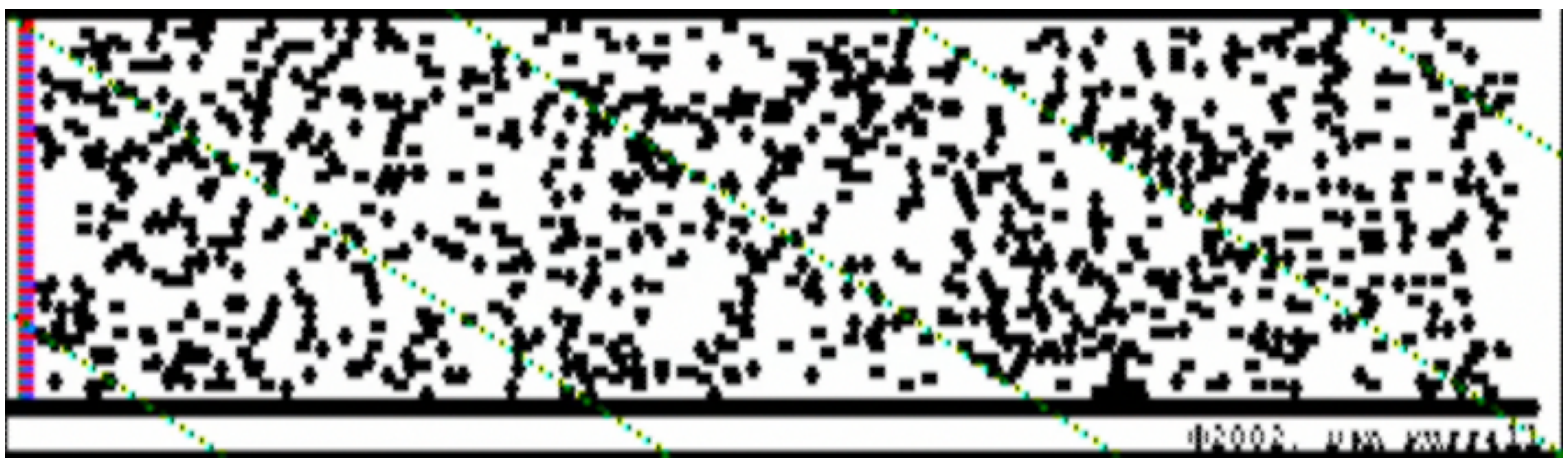
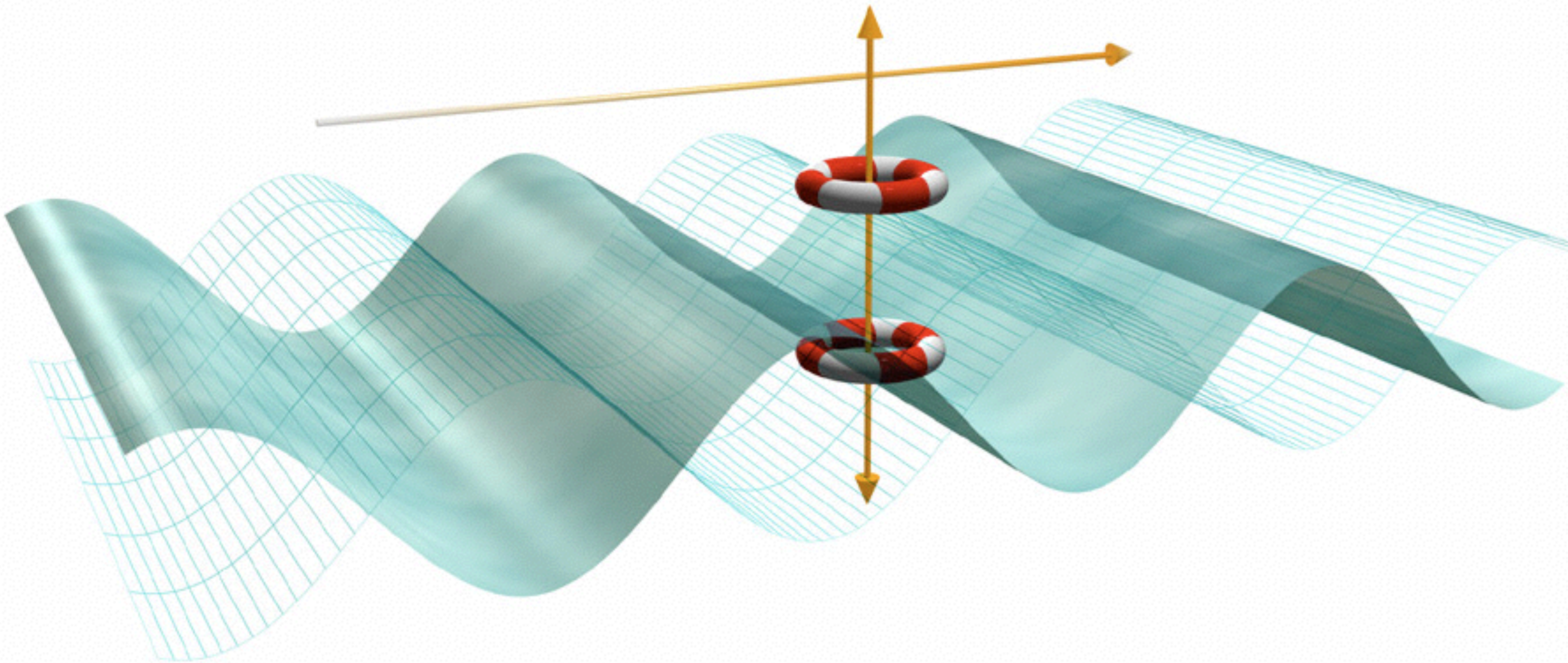
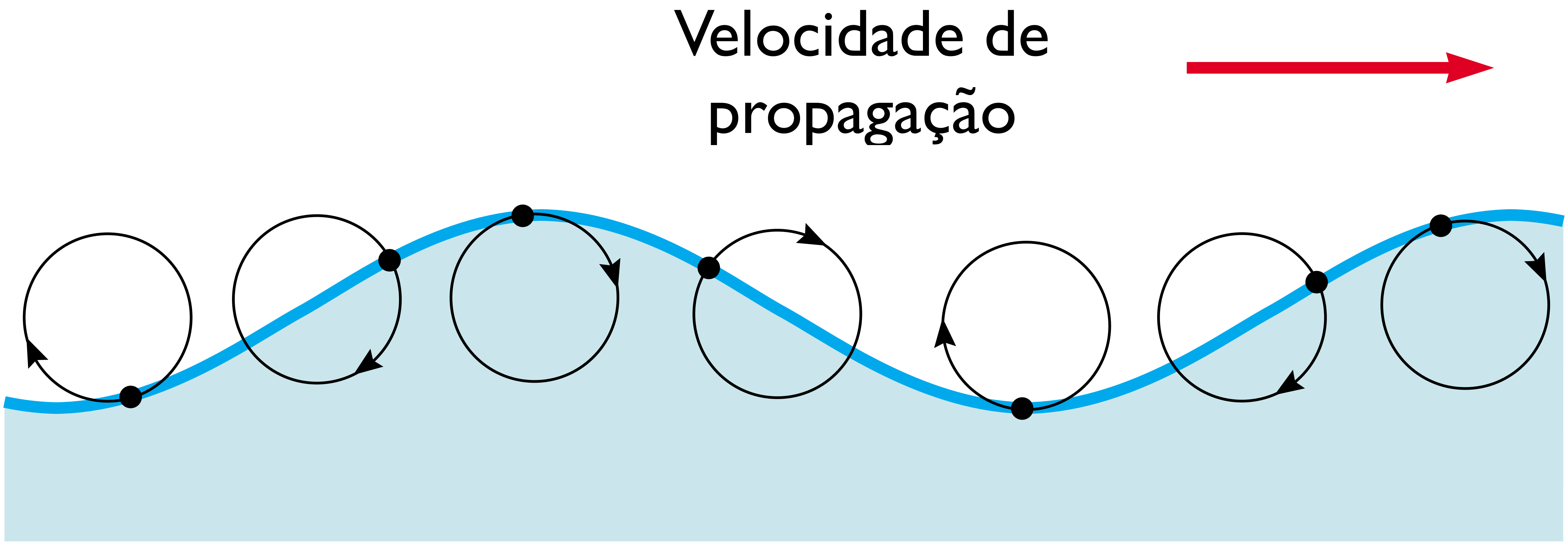
Na crista da onda I


1
0.5
0
-0.5
-1
5
10
15
20
25
30
x




©2002,




Velocidade de propagação

- Em nenhum destes processos há transporte de matéria...

- mas há **transporte de energia**!

- e *momento linear* e *angular*…

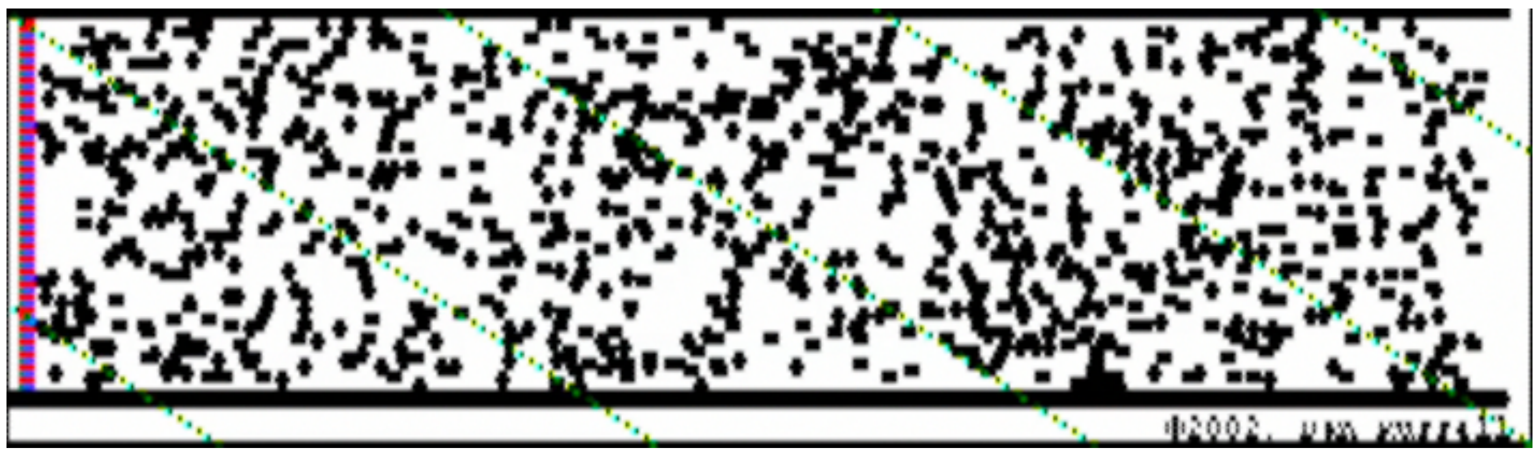
- ... e há sempre um “suporte”, isto é, um meio onde a onda se propaga

Ondas mecânicas progressivas

Numa onda mecânica (ou elástica) progressiva, necessitamos de:

- Uma perturbação inicial
- Um meio onde a onda se propague
- Um mecanismo físico de "contágio"

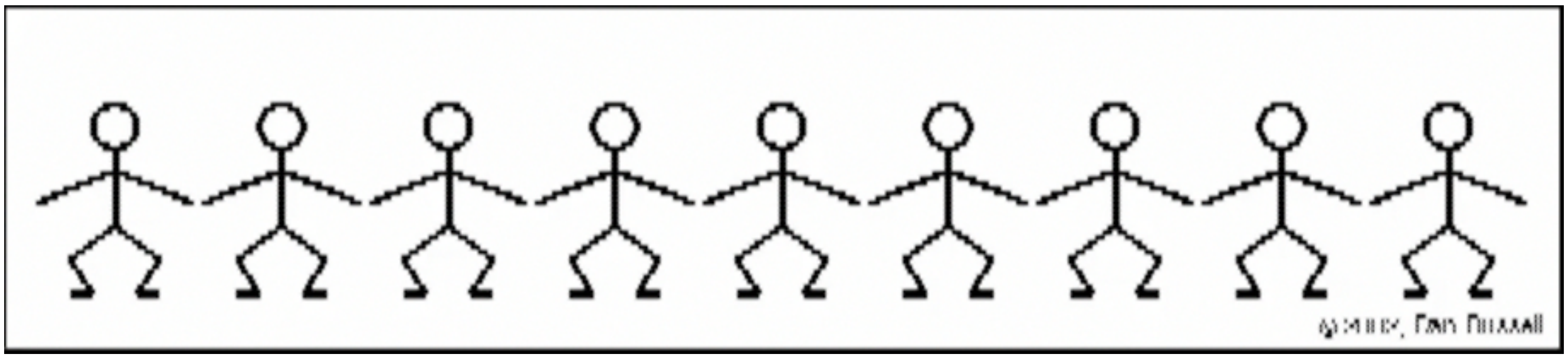
Ondas longitudinais



Direção de propagação

Direção de “oscilação”

Ondas transversais



Direção de propagação

Direção de "oscilação"

Velocidades...

- A onda propaga-se com uma certa velocidade, que depende do meio
- ... mas que **NÃO** está relacionada com a velocidade de oscilação de qualquer partícula do meio!

Velocidade do som

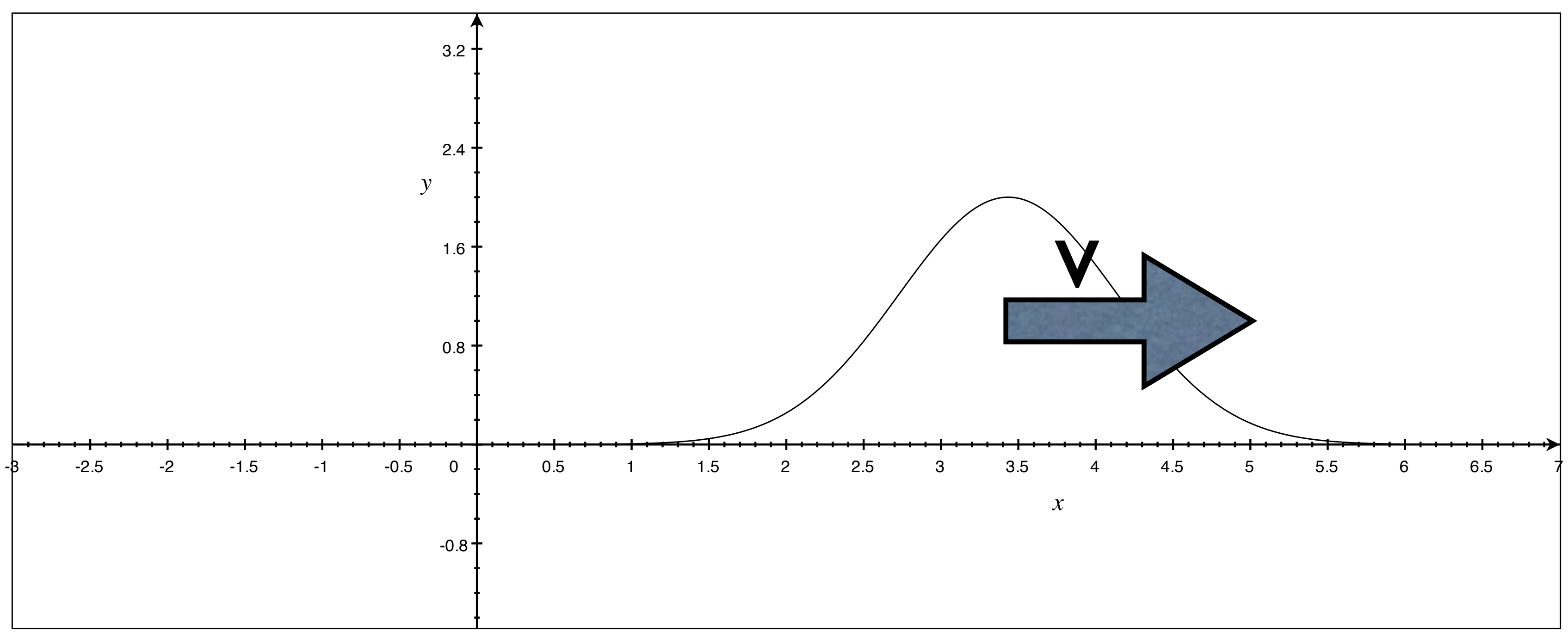
- No ar: $\approx$340 m/s
- Na água: $\approx$1500 m/s
- No aço: >6000 m/s
- A velocidade de propagação depende do meio... Por exemplo, a velocidade de propagação de uma perturbação numa corda esticada é:

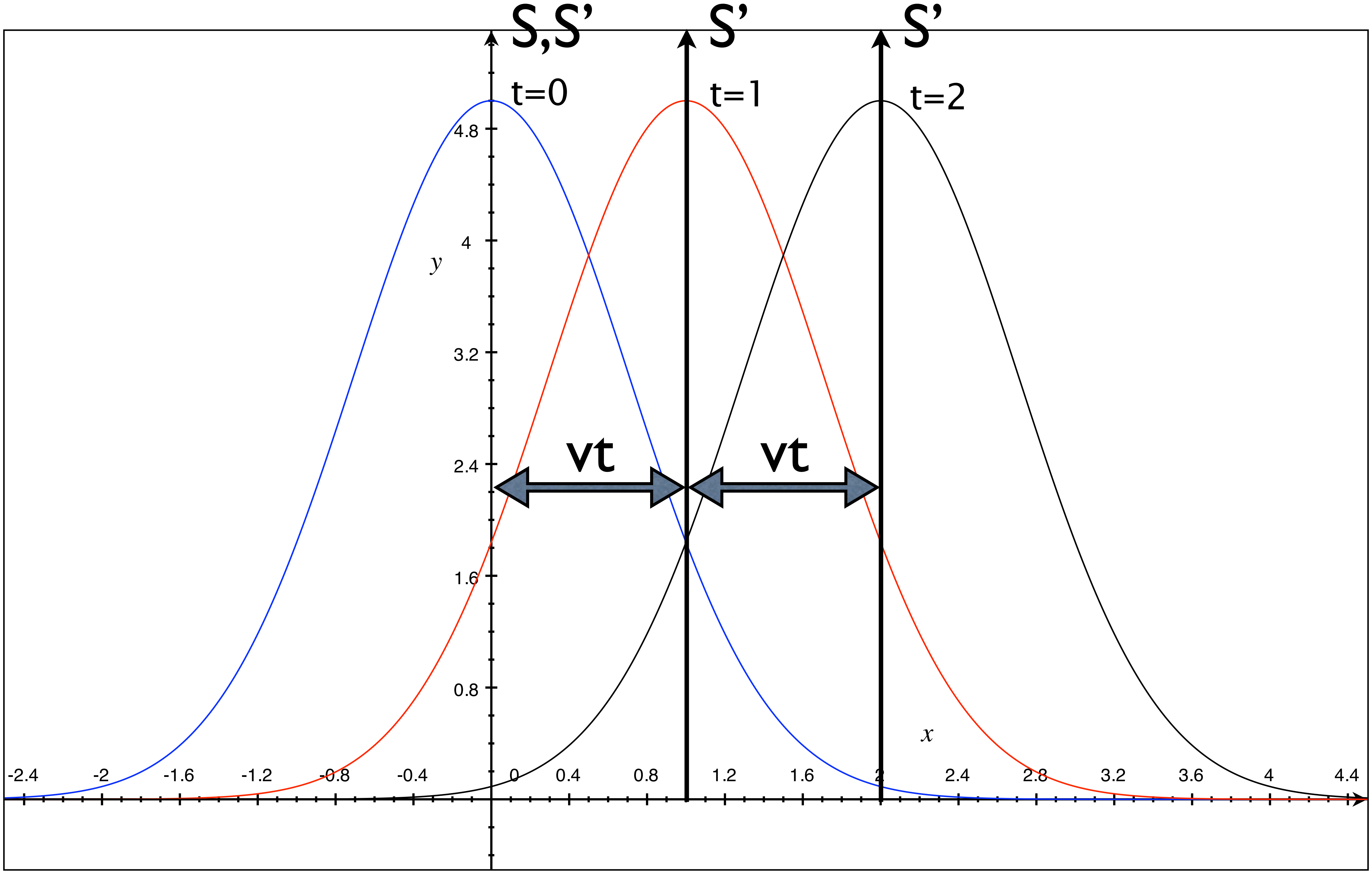
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Como descrever matematicamente uma onda?

- Onda unidimensional, propagando-se ao longo do eixo dos xx: y(x,t)

Função de onda




S,S'
S'
S'
t=0
t=1
t=2
vt
vt
y
x
4.8
4
3.2
2.4
1.6
0.8
-2.4
-2
-1.6
-1.2
-0.8
-0.4
0
0.4
0.8
1.2
1.6
2
2.4
2.8
3.2
3.6
4
4.4

- Então basta mudar de referencial:

$$x=x'+vt$$

$$y'=f(x') \Longrightarrow y=f(x-vt)$$

- Se a onda se deslocar para a esquerda:

$$x=x'-vt \Longrightarrow y=f(x+vt)$$

- Se nos deslocarmos de tal modo que

  x-vt = constante

  então estamos sempre a acompanhar o mesmo ponto (fase...) da onda. Se tirarmos a derivada desta expressão

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Velocidade de fase

Equação de onda

$$y = f(x - vt)$$

$$u(x,t) = x - vt$$

$$y = f\left(u(x,t)\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dy}{du} \cdot 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dy}{du} \cdot v$$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial y}{\partial t}}$$

Onda que se desloca para a direita...

Equação de onda

$$y = f(x + vt)$$

$$u(x,t) = x + vt$$

$$y = f\left(u(x,t)\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dy}{du} \cdot 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dy}{du} \cdot v$$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{v}\frac{\partial y}{\partial t}}$$

Onda que se desloca para a esquerda...

Equação de onda

Não podemos ter uma equação para cada sentido de propagação da onda...

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 y}{du^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d^2 y}{du^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Funções de onda (ondas progressivas)

$$y(x,t) = \frac{2}{(x-3t)^2+1}$$

Pulsos

$$y(x,t) = \mathrm{e}^{-(x-5t)^2}$$

$$y(x,t) = 10\sin\left(3(x+2t)+\pi\right)$$

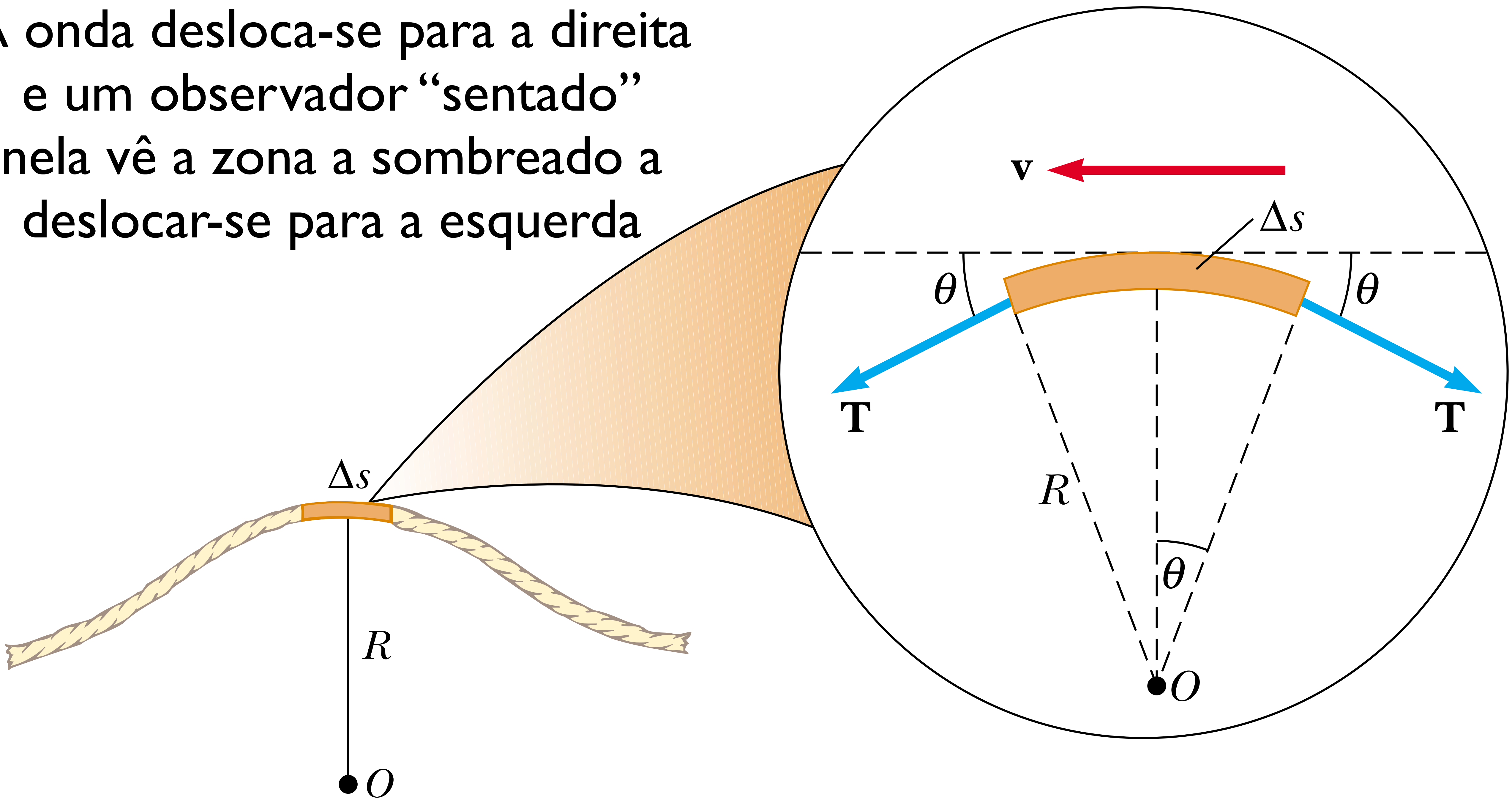
Onda periódica

$$y(x,t) = \cancel{10\sin}(3x)\mathrm{e}^{-10t^2}$$

Não é uma onda progressiva!

Ondas numa corda esticada

A onda desloca-se para a direita e um observador "sentado" nela vê a zona a sombreado a deslocar-se para a esquerda



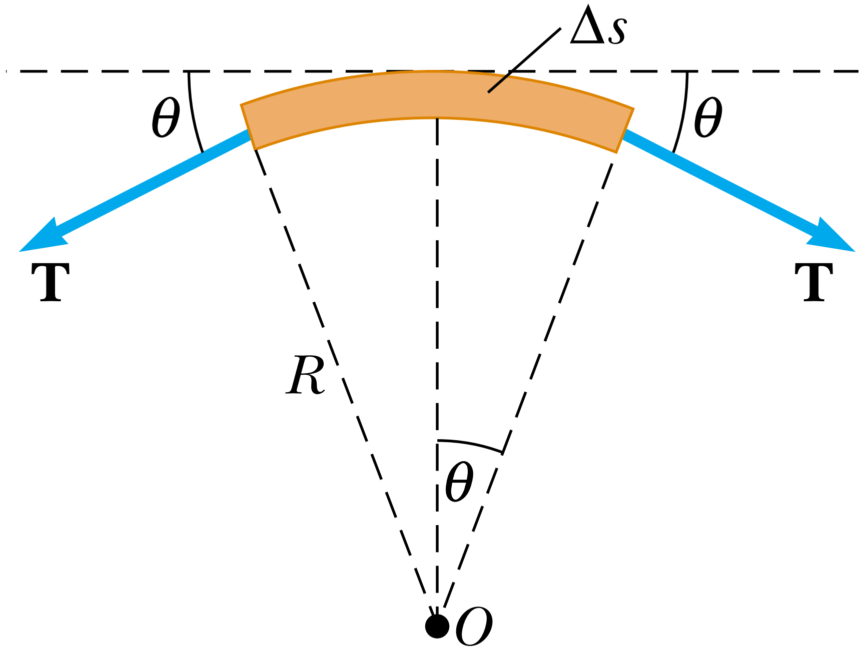
Ondas numa corda esticada

As componentes tangenciais da tensão anulam-se...

$F_r = 2T\sin\theta \approx 2T\theta$ ... se o pulso for "pequeno"

$m = \mu\Delta s = \mu\,(2R\theta)$

massa por unidade de comprimento



$$F_r = m\frac{v^2}{R}$$

$$2T\theta = \mu(2R\theta)\frac{v^2}{R}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

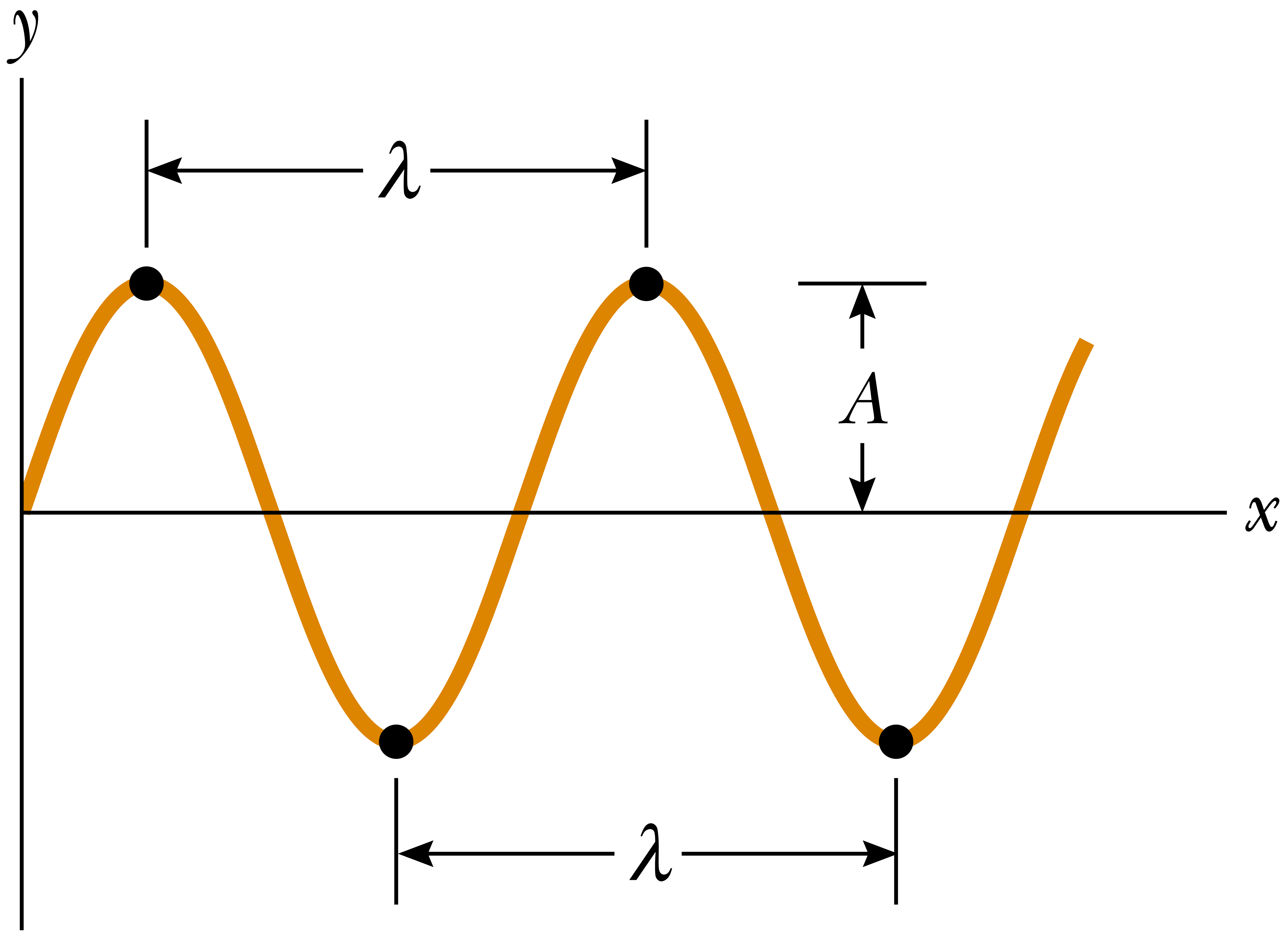
Ondas periódicas sinusoidais

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm vt) + \varphi\right)$$

Amplitude

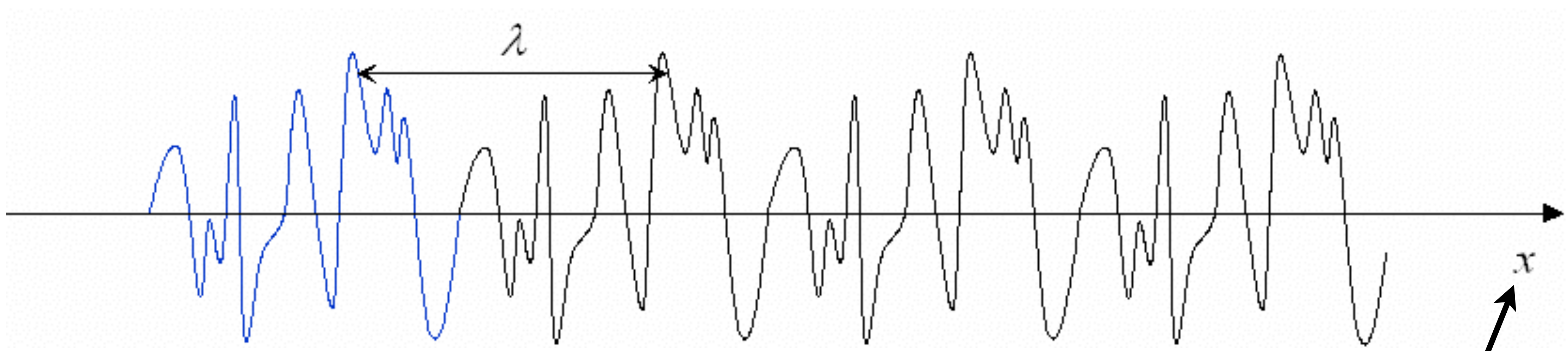
Comprimento de onda

Fase na origem



y
λ
A
x
λ

Comprimento de onda



Distância mínima entre dois pontos na mesma fase de vibração

Ondas periódicas sinusoidais

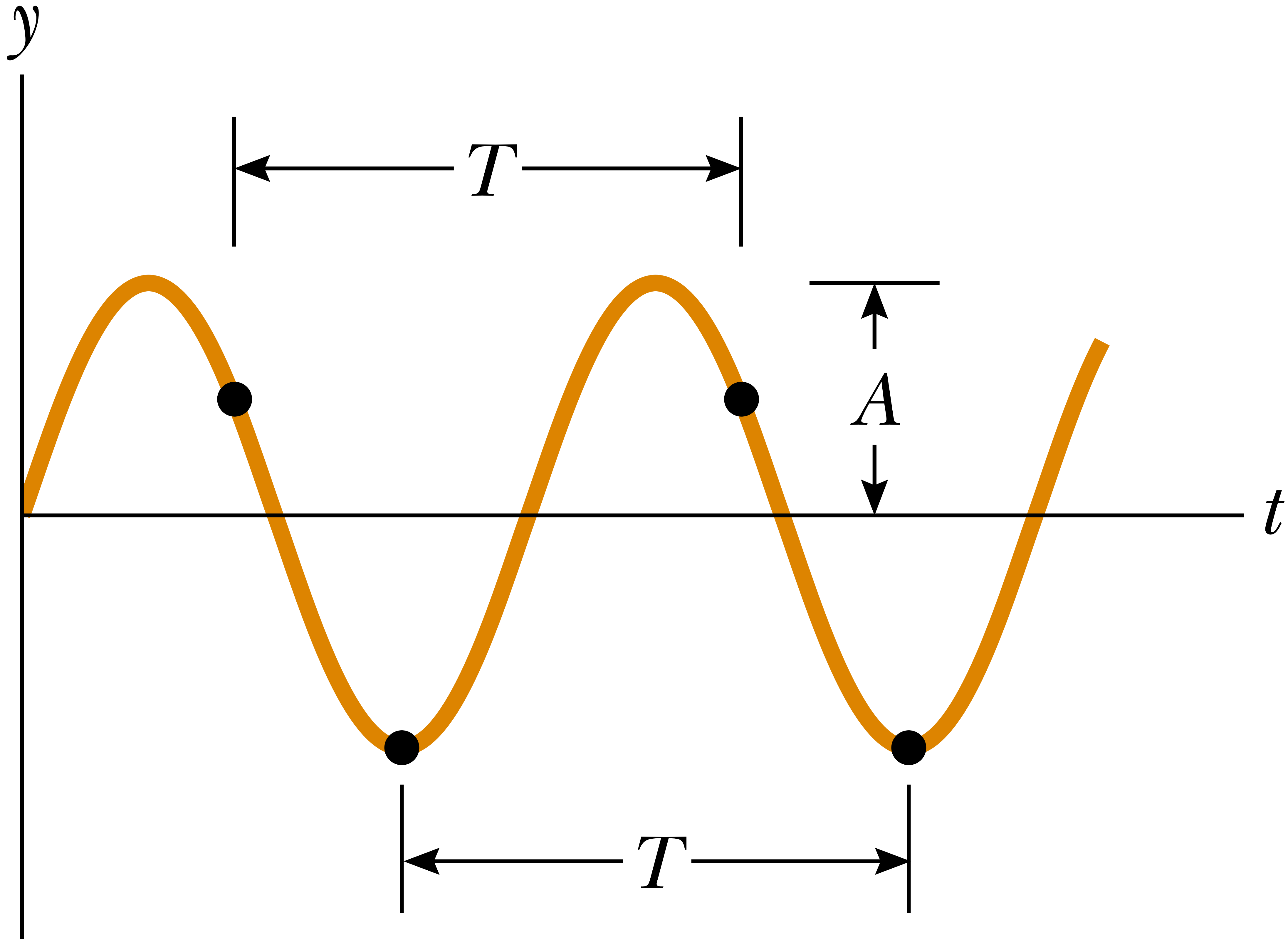
$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm vt) + \varphi\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ Número de onda

$$y(x,t) = A\sin\left(k(x \pm vt) + \varphi\right)$$

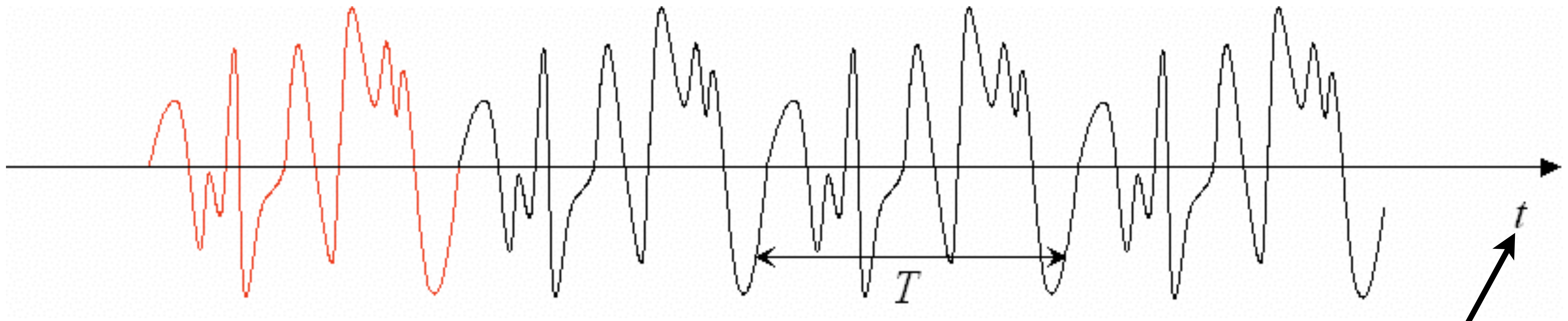
Frequência angular $\omega = kv = \frac{2\pi}{T}$ Período

$$y(x,t) = A\sin\left(kx \pm \omega t + \varphi\right)$$



y
T
A
t
T

Período



Duração de um ciclo completo de vibração para um ponto fixo qualquer

Haverá uma relação entre período e comprimento de onda?

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= f(x - vt) \\
&= f(x + \lambda - vt) \\
&= f(x - v(t+T)) \\
&= f(x + \lambda - v(t+T))
\end{aligned}
$$

$$x - vt = x + \lambda - v(t+T) \Rightarrow \lambda = vT$$

$$\Downarrow$$

Recorrendo à frequência $f = \dfrac{1}{T}$ $\qquad v = \lambda f$

Velocidades de oscilação e de propagação

$$y(x,t) = A\sin\left(kx \pm \omega t + \varphi\right)$$

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \pm A\omega\cos\left(kx \pm \omega t + \varphi\right)$$

Velocidade de oscilação da partícula em x

$$v = \pm\frac{\omega}{k}$$

Velocidade de propagação da onda

$$a_y(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \mp A\omega^2\sin\left(kx \pm \omega t + \varphi\right)$$

Movimento de um ponto do meio onde se propaga a onda

$$y(x,t) = A\sin\left(kx \pm \omega t + \varphi\right)$$

$$x = 0 \qquad \begin{aligned} y(0,t) &= A\sin\left(\omega t + \varphi\right) \\ v_y(0,t) &= A\omega\cos\left(\omega t + \varphi\right) \\ a_y(0,t) &= -A\omega^2\sin\left(\omega t + \varphi\right) = -\omega^2 y(0,t) \end{aligned}$$

Cada ponto executa movimento harmónico simples!

"Há" uma força de restauro elástica...

Princípio da sobreposição

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Esta equação é LINEAR em y(x,t)

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial t^2}$$

A onda resultante da soma de duas ondas ainda obedece à mesma equação de onda...

Sobreposição de ondas

- Podemos obter uma onda “somando” várias ondas:

$$\phi(x,t) = \sum_i a_i f_i(x \pm v_i t)$$

- Qualquer onda se pode escrever com a soma de onda sinusoidais (análise de Fourier)

Somar duas ondas

Quando duas ondas se "cruzam", isto é, quando o mesmo ponto do meio é perturbado em simultâneo por duas ondas distintas, o resultado é uma perturbação que é a soma algébrica das duas perturbações

Diz-se que as duas ondas **interferem**

Somar duas ondas com a mesma fase

$$
\begin{array}{r}
A_1 \sin(kx - \omega t + \alpha) \\
+A_2 \sin(kx - \omega t + \alpha) \\
\hline
= (A_1 + A_2) \sin(kx - \omega t + \alpha)
\end{array}
$$

Interferência construtiva

Somar duas ondas em oposição de fase

$$\begin{array}{r} A_1 \sin(kx - \omega t + \alpha) \\ -A_2 \sin(kx - \omega t + \alpha) \\ \hline = (A_1 - A_2) \sin(kx - \omega t + \alpha) \end{array}$$

Interferência destrutiva

Somar duas ondas com uma diferença de fase arbitrária

$$A\sin(kx-\omega t)$$

$$+A\sin(kx-\omega t+\alpha)$$

$$=2A\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(kx-\omega t+\frac{\alpha}{2}\right)$$

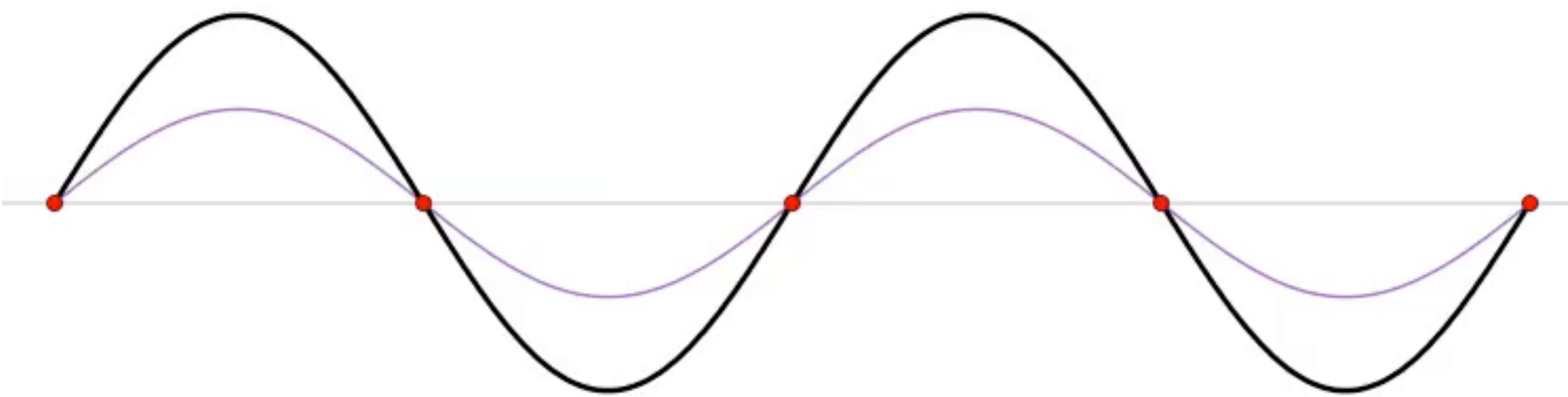
Somar duas ondas que se propagam com a mesma velocidade em sentido oposto

$$
\begin{aligned}
&A\sin(kx - \omega t) \\
&+A\sin(kx + \omega t) \\
\hline
&= 2A\sin(kx)\cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

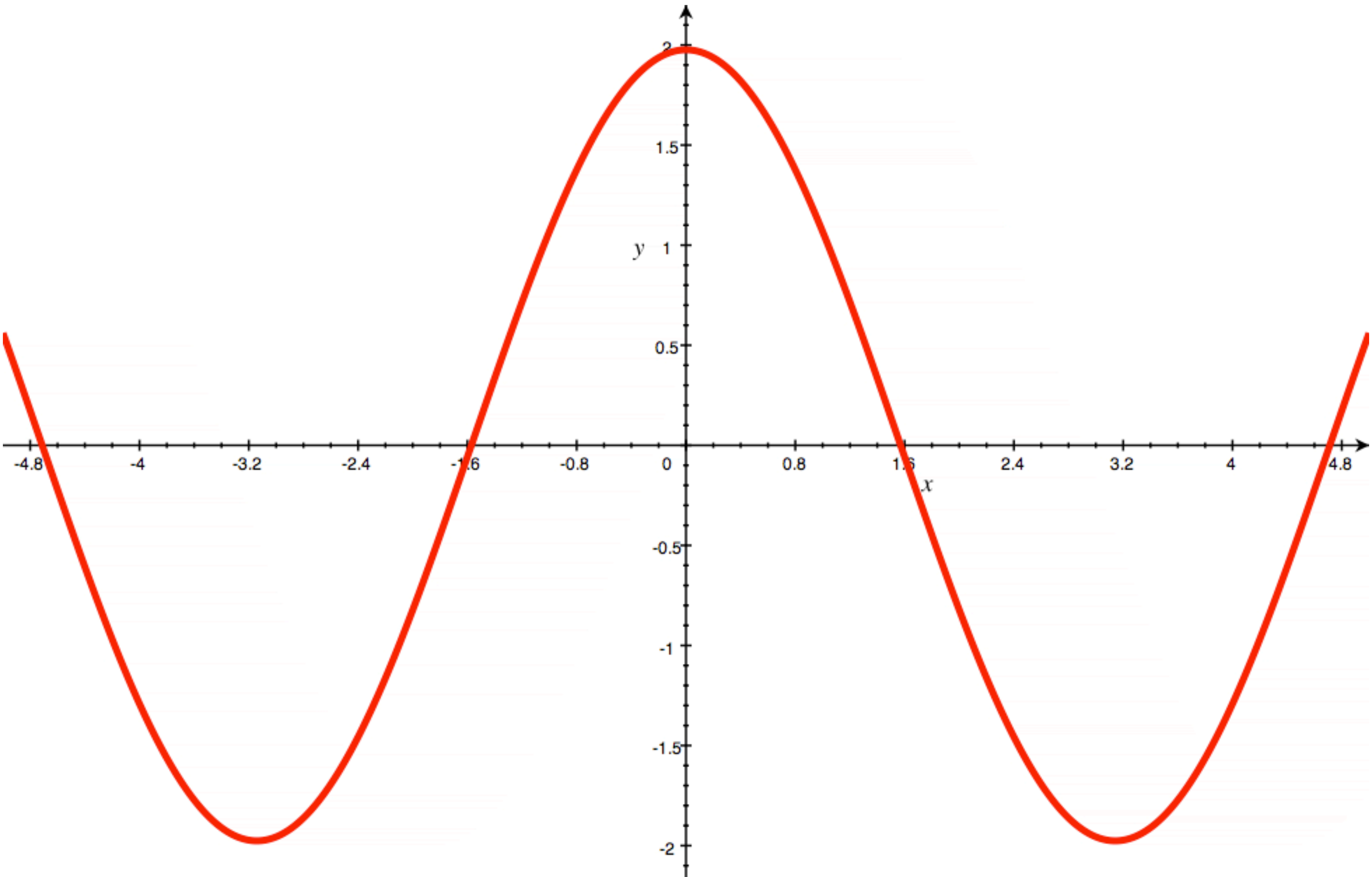
NÃO é uma onda progressiva!

Onda estacionária

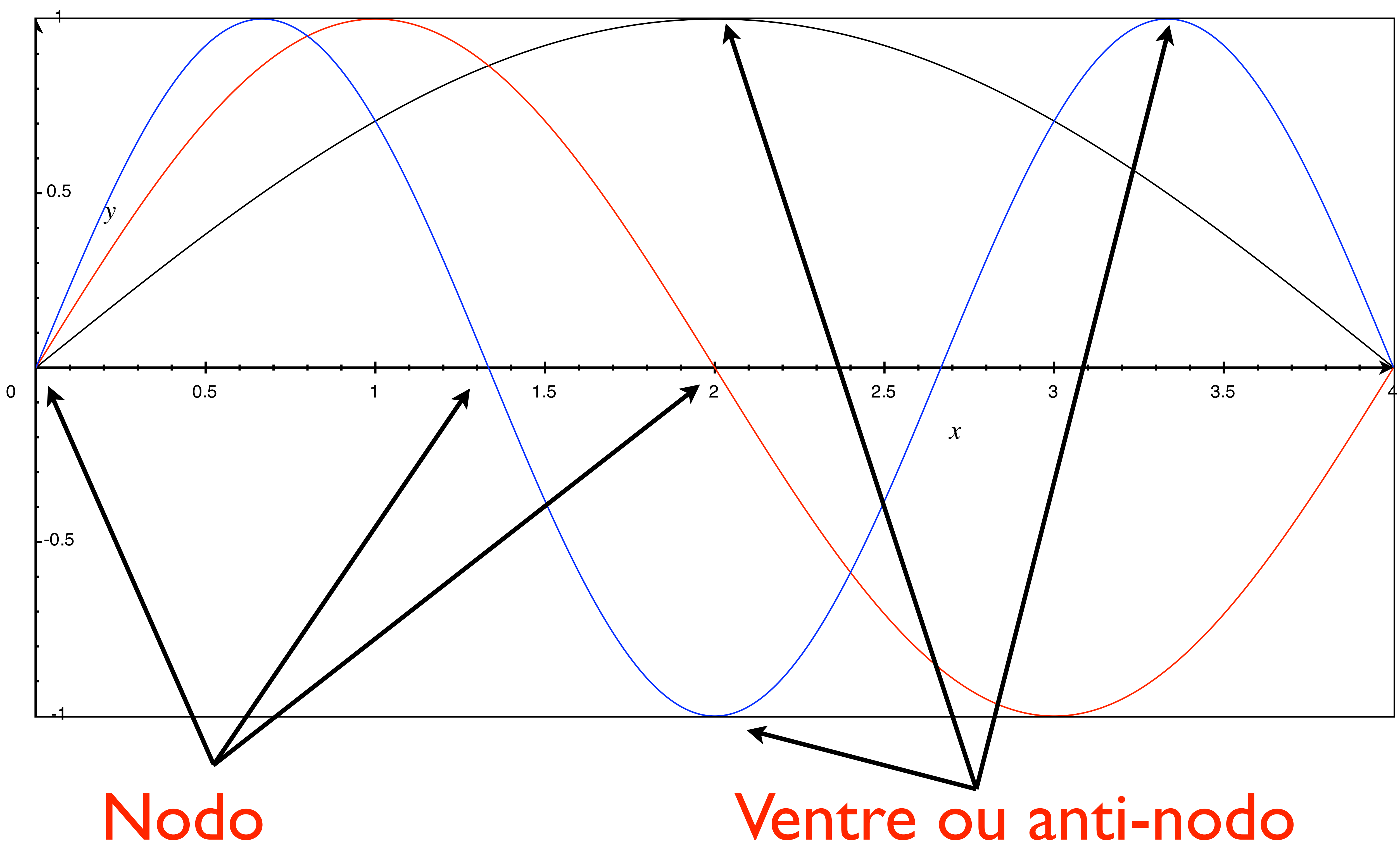
Ondas estacionárias



Ondas estacionárias

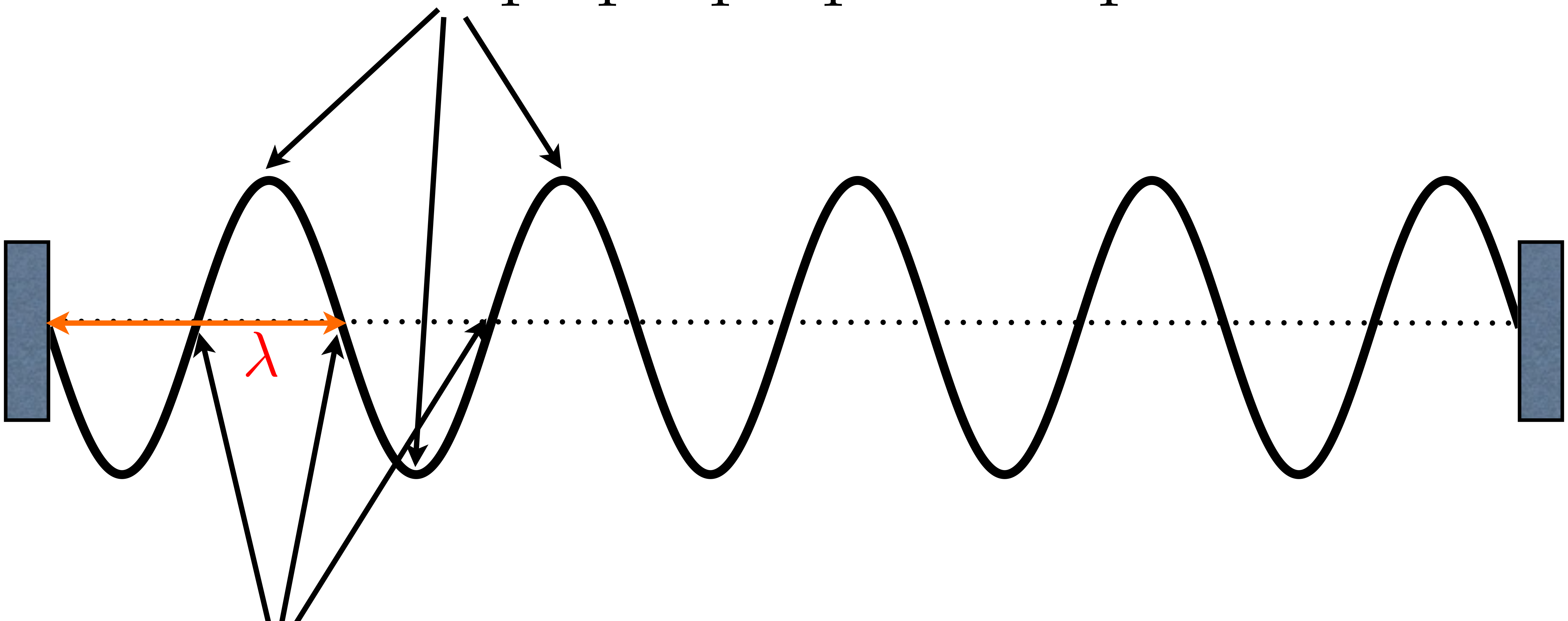


Ondas estacionárias



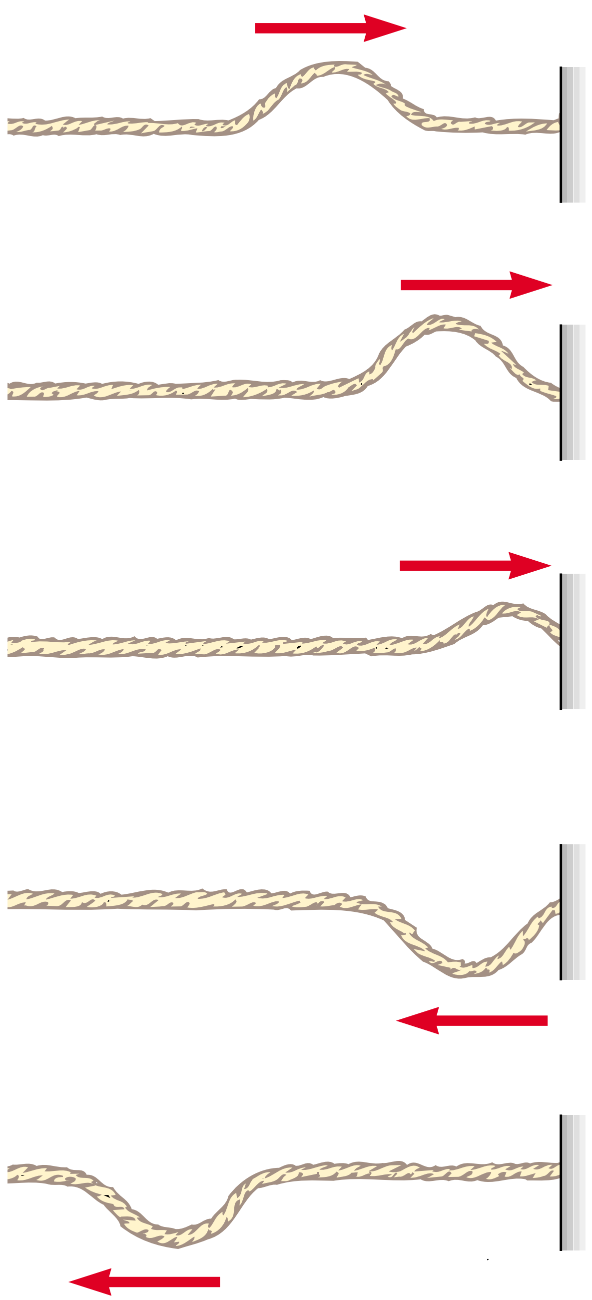
Ondas estacionárias

Ventres: $\frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \ldots = \frac{n\lambda}{4} \quad n = 1, 3, 5, \ldots$

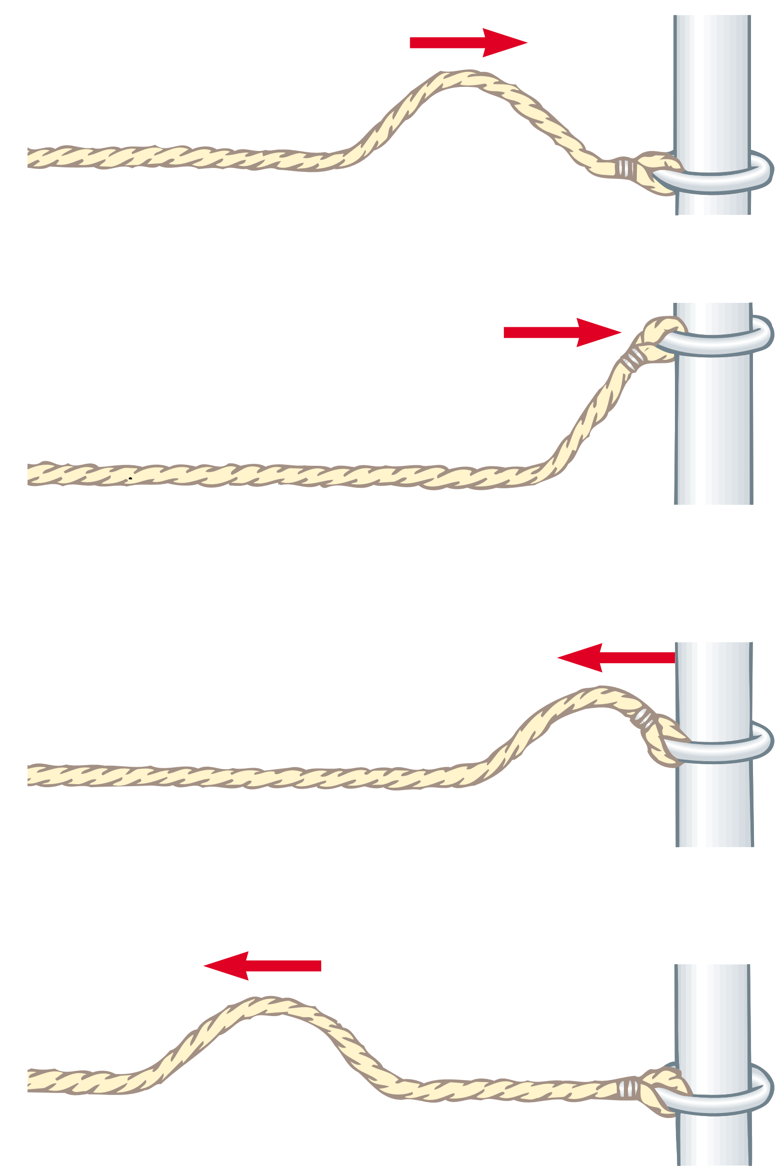


Nodos: $\frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \ldots = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Reflexão de pulsos

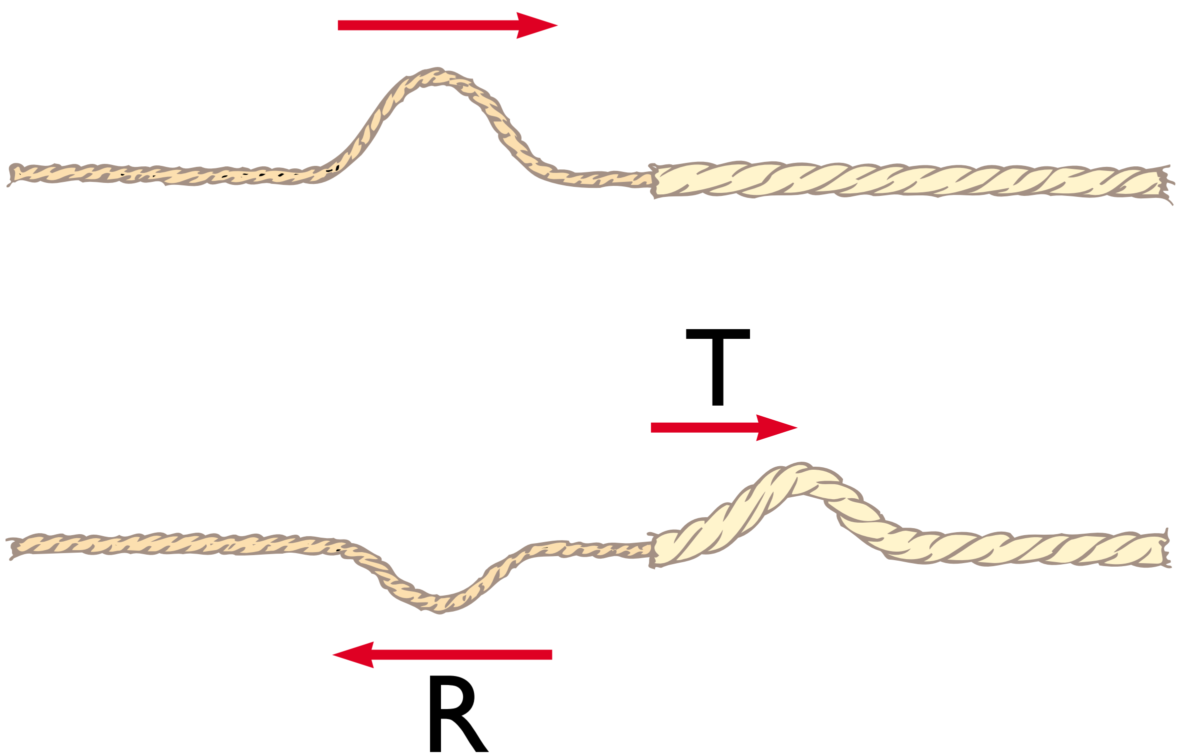


Extremidade fixa: o pulso refletido inverte a sua fase

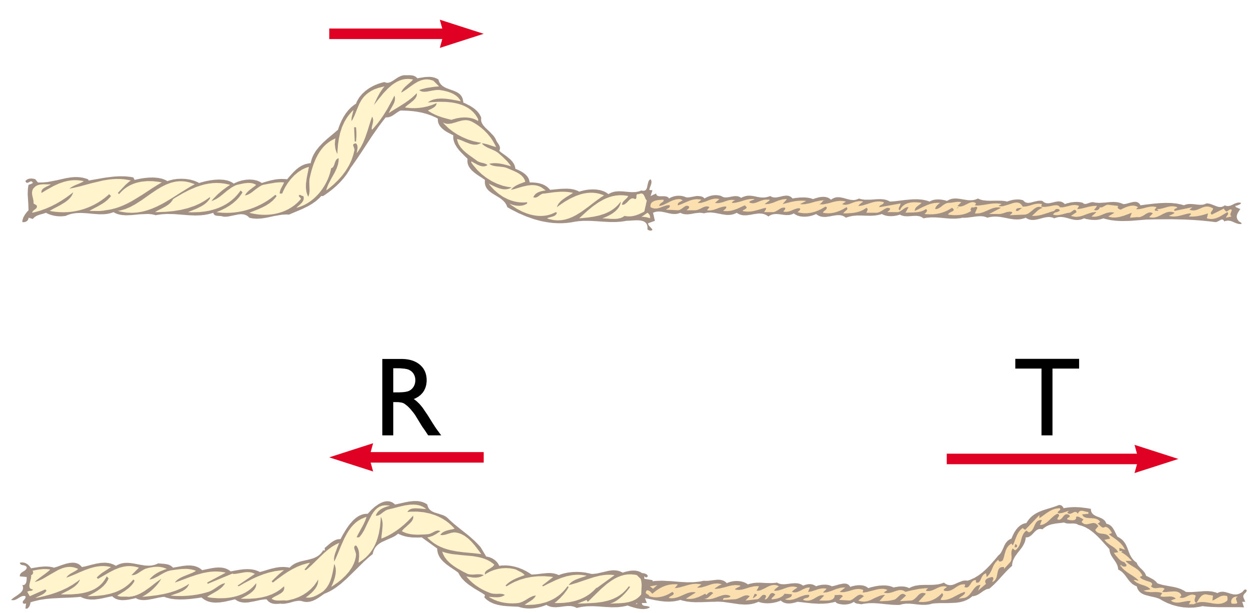


Extremidade livre: o pulso refletido mantém a sua fase

Reflexão e transmissão de pulsos



Na junção com uma corda mais pesada há inversão de fase no pulso refletido



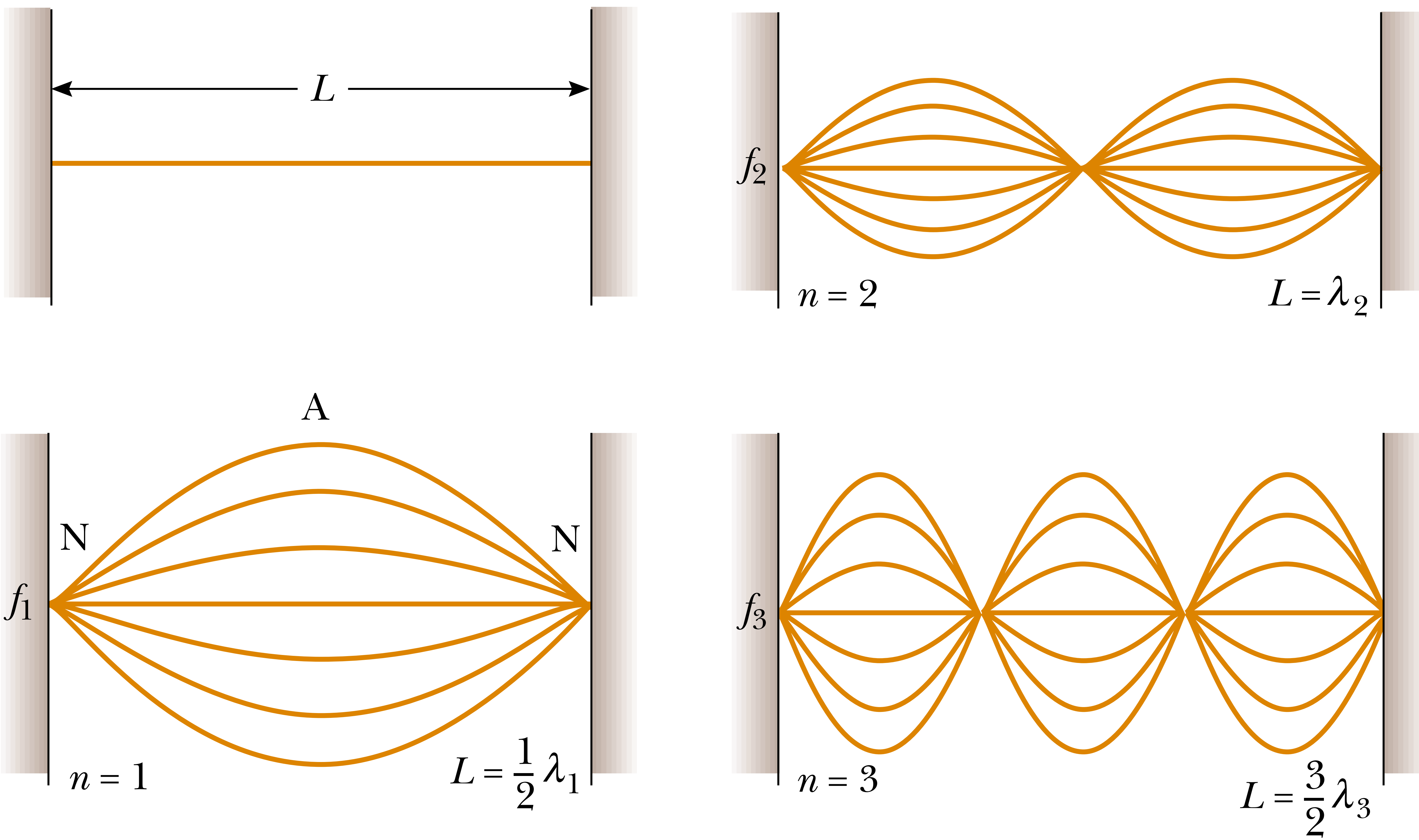
Na junção com uma corda mais leve o pulso refletido mantém a sua fase

Ondas estacionárias numa corda esticada

- Numa corda de comprimento L esticada (extremidades fixas!) apenas são permitidas ondas em que o comprimento de onda é:

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$$

Ondas estacionárias numa corda esticada



Ondas estacionárias numa corda esticada

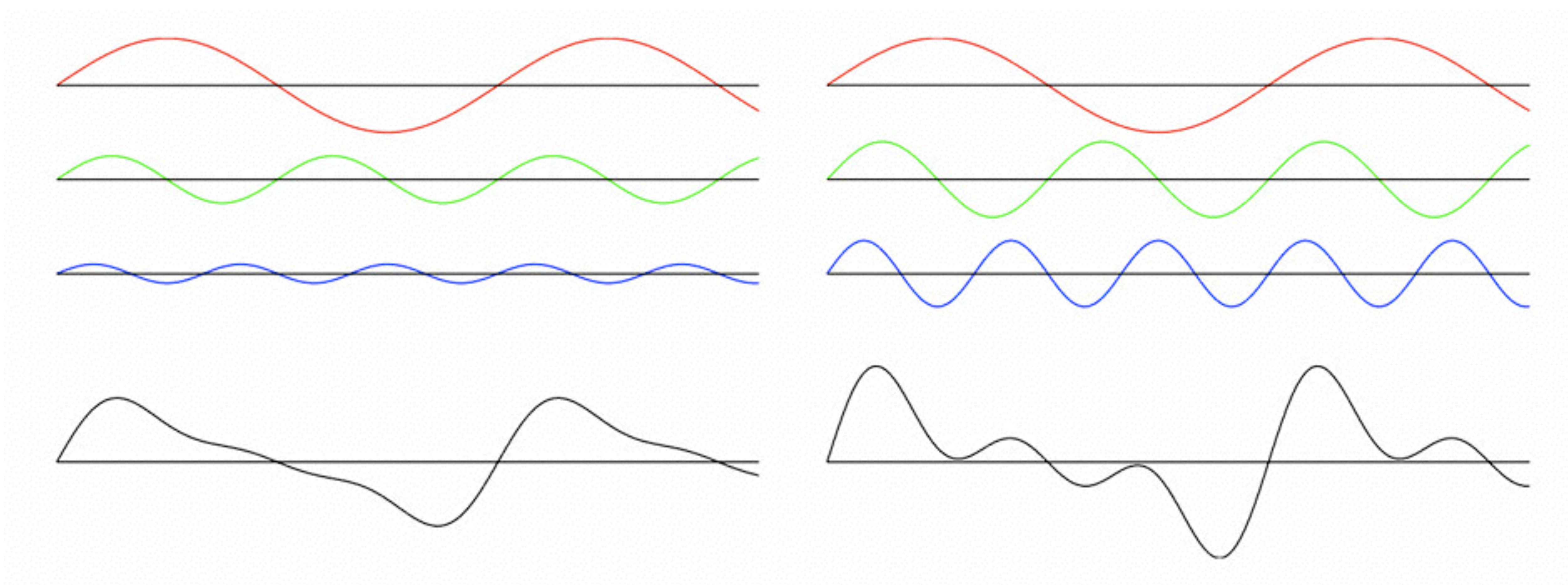
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

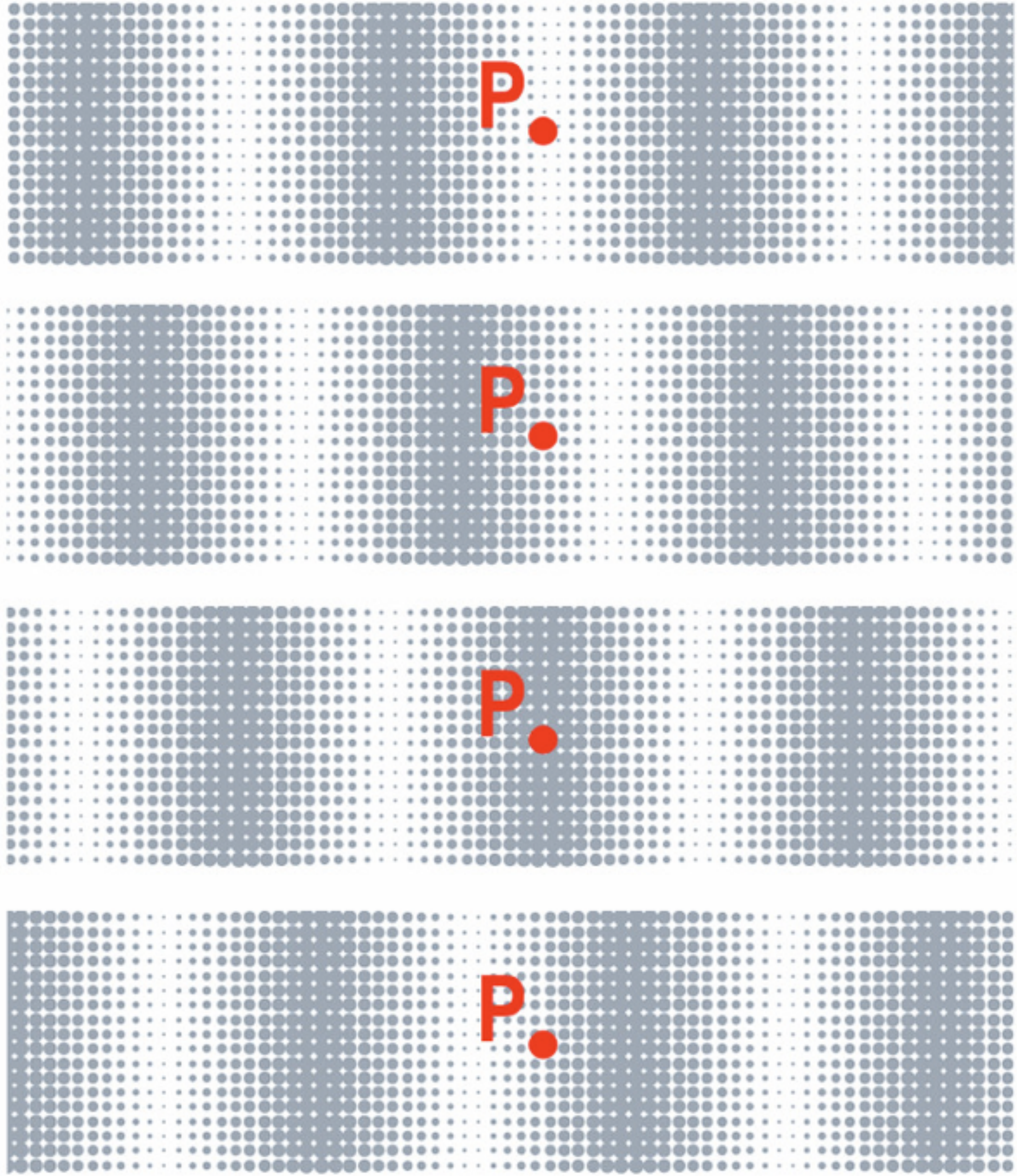
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

1ª harmónica	$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$	Frequência fundamental
2ª harmónica	$f_2 = 2f_1$	1ª harmónica
3ª harmónica	$f_3 = 3f_1$	2ª harmónica
4ª harmónica	$f_4 = 4f_1$	3ª harmónica

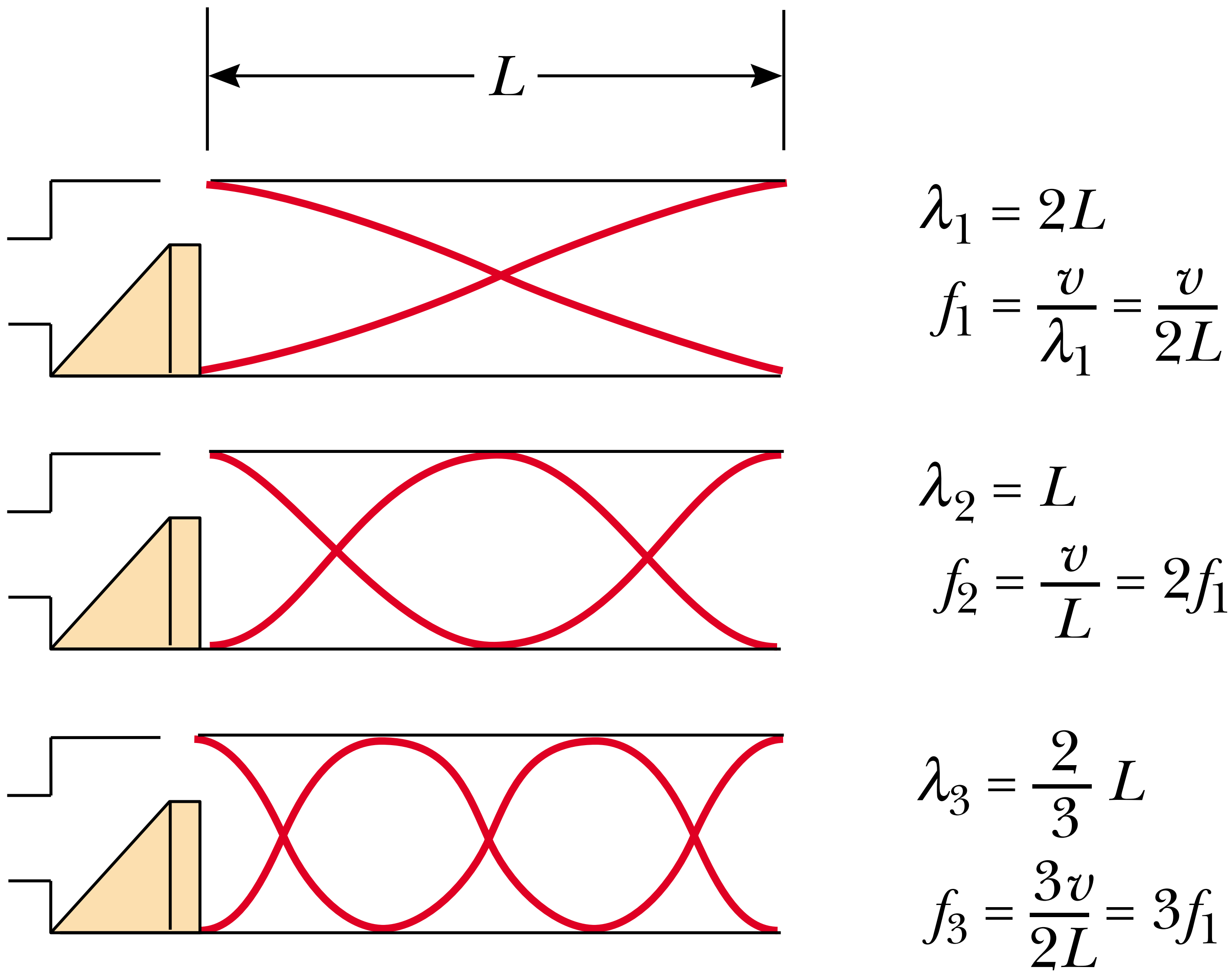
Ondas estacionárias numa corda esticada

- Combinações diferentes de harmónicas secundárias produzem "sons" diferentes (timbre...)



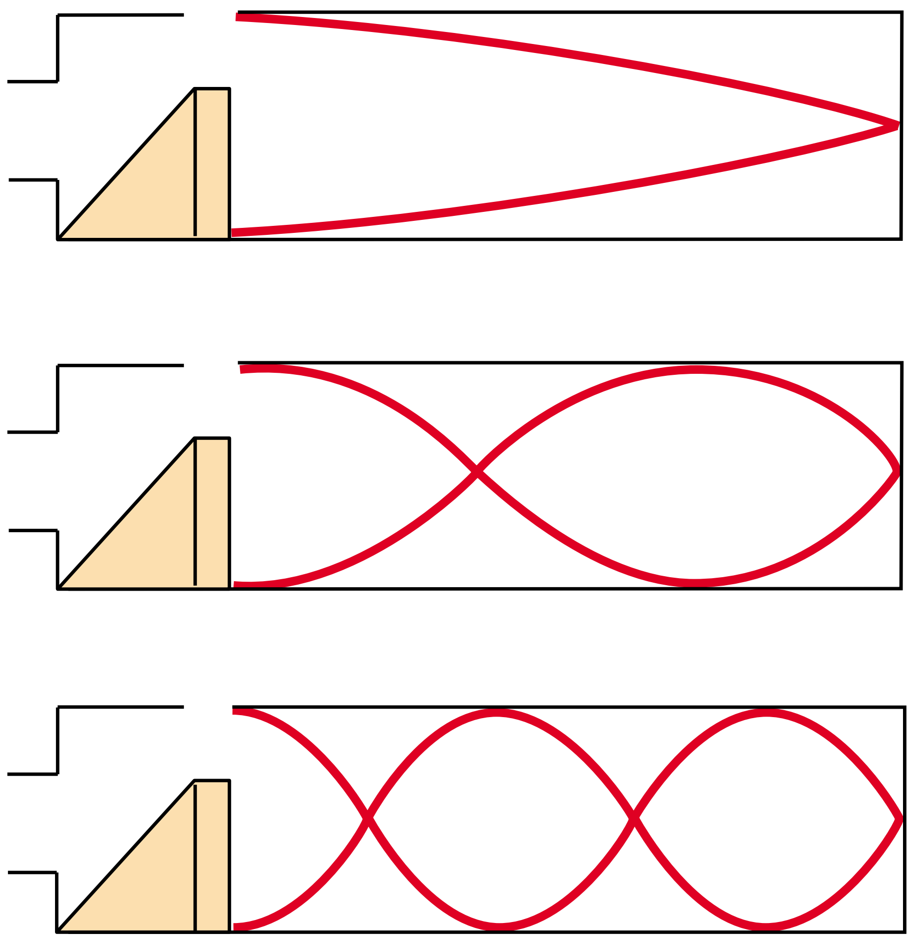


Ondas estacionárias num tubo aberto



$$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ondas estacionárias num tubo aberto/fechado



$$\lambda_1 = 4L$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L}$$

$$\lambda_3 = \frac{4}{3}L$$

$$f_3 = \frac{3v}{4L} = 3f_1$$

$$\lambda_5 = \frac{4}{5}L$$

$$f_5 = \frac{5v}{4L} = 5f_1$$

$$f_n = n\frac{v}{4L} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

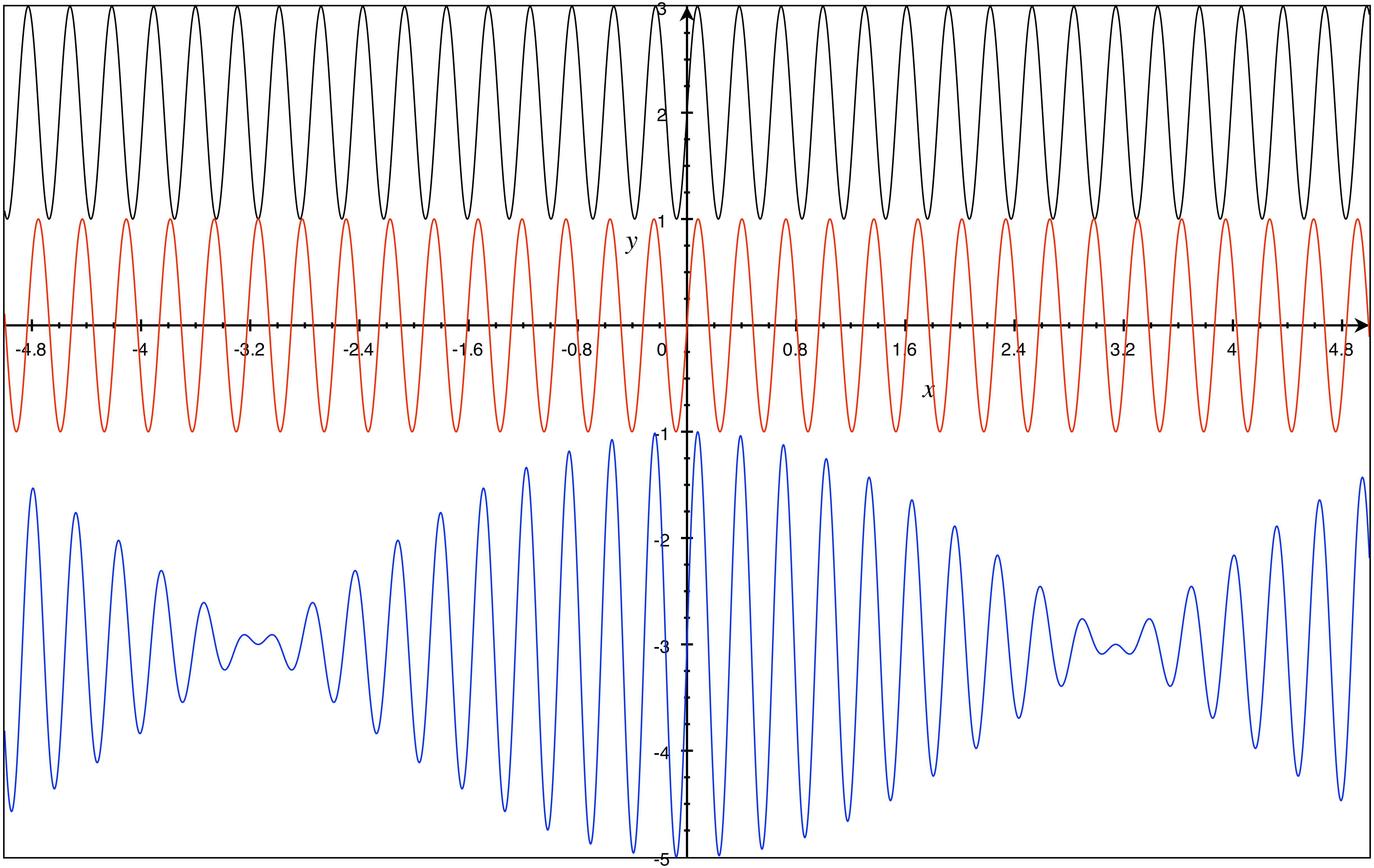
Somar duas ondas "quase iguais"

$$A \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$+A \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$= 2A \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) \sin(k x - \omega t)$$

Batimento

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} \qquad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$



$$2A\cos(\Delta k\, x - \Delta\omega\, t)\sin(kx - \omega t)$$

Batimentos

Num batimento a onda organiza-se em grupos que se deslocam com velocidade

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

A **velocidade de grupo** é diferente da velocidade de fase e obtém-se tomando o limite $\Delta k \to 0$

$$v_{\text{grupo}} = \frac{d\omega}{dk} = v_{\text{fase}} + k\frac{dv_{\text{fase}}}{dk}$$

Transporte de energia

Qual é a energia cinética de um segmento de corda que oscila?

$$dE_c = \frac{1}{2}(dm)v_y^2$$

$$dE_c = \frac{1}{2}(\mu dx)v_y^2$$

$$dE_c = \frac{1}{2}(\mu dx)\left(-A\omega\cos\left(kx \pm \omega t + \varphi\right)\right)^2$$

Transporte de energia

Se escolhermos um instante (t=0 ?) e integrarmos ao longo de um comprimento de onda...

$$E_c = \int_0^\lambda \frac{1}{2}(\mu dx)\left(-A\omega\cos\left(kx+\varphi\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \int_0^\lambda \cos^2\left(kx+\varphi\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2\lambda$$

Transporte de energia

$$E_c = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Se calcularmos a energia potencial elástica da mesma forma:

$$E_p = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Transporte de energia

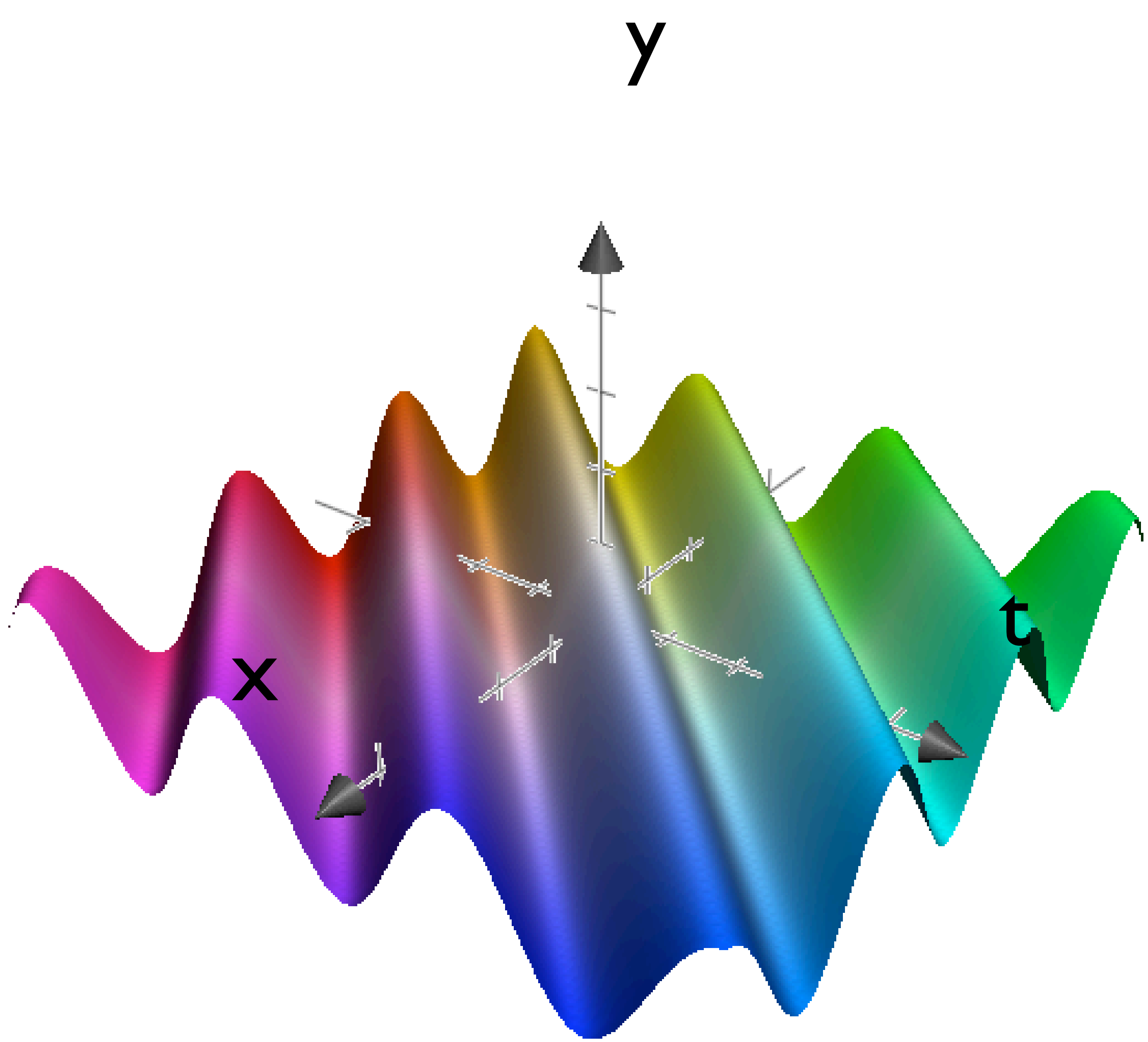
Esta energia passa por um dado ponto da corda a cada período de oscilação, logo a **taxa de transferência de energia** é:

$$\mathcal{P} = \frac{E_m}{T}$$

$$= \frac{1}{T}\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

$$= \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

Ondas multi-dimensionais

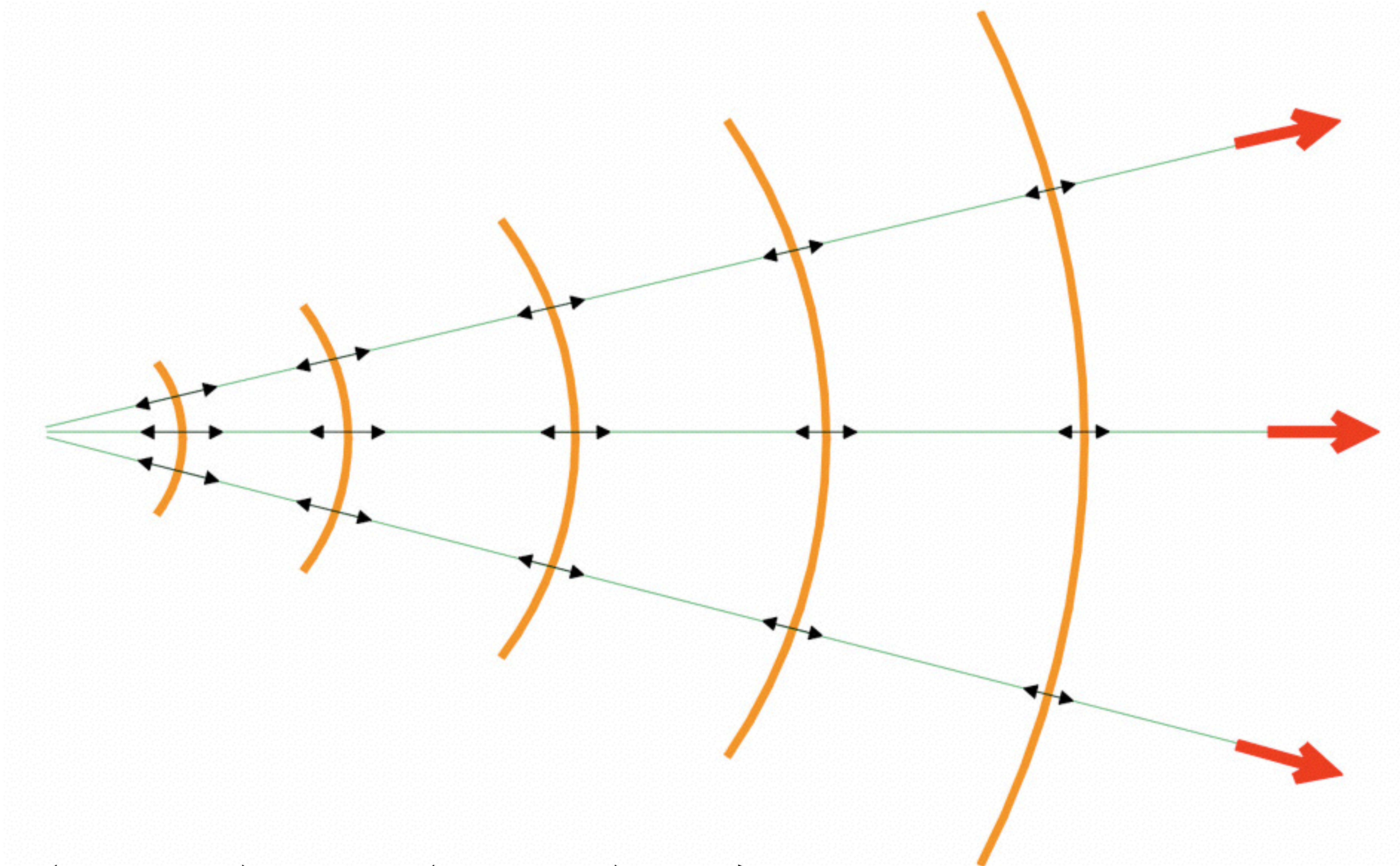


Frente de onda

A **frente de onda** é o lugar geométrico dos pontos na mesma fase...

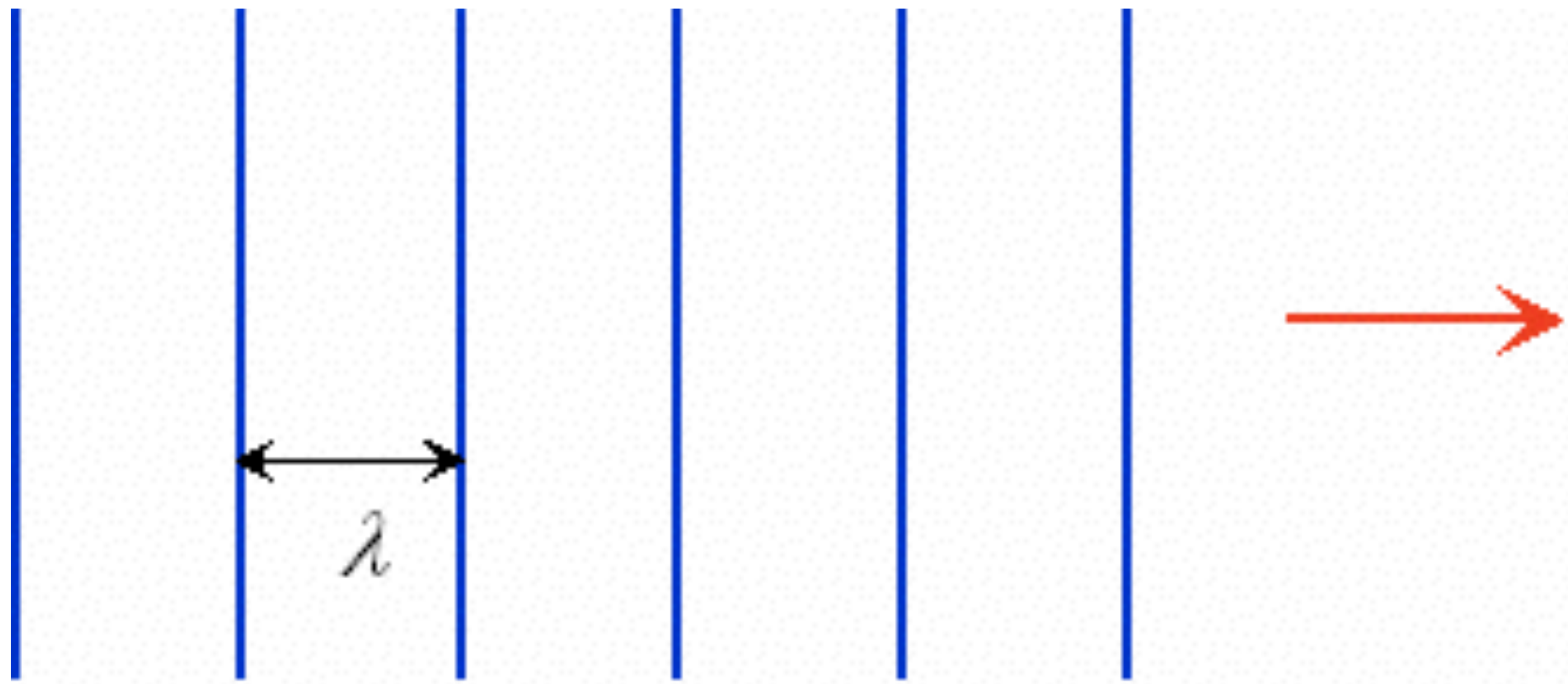
$$\sin(kx - \omega t) \rightsquigarrow \sin\left(f(\vec{k}, \vec{r}) - \omega t\right)$$

Onda circular/esférica



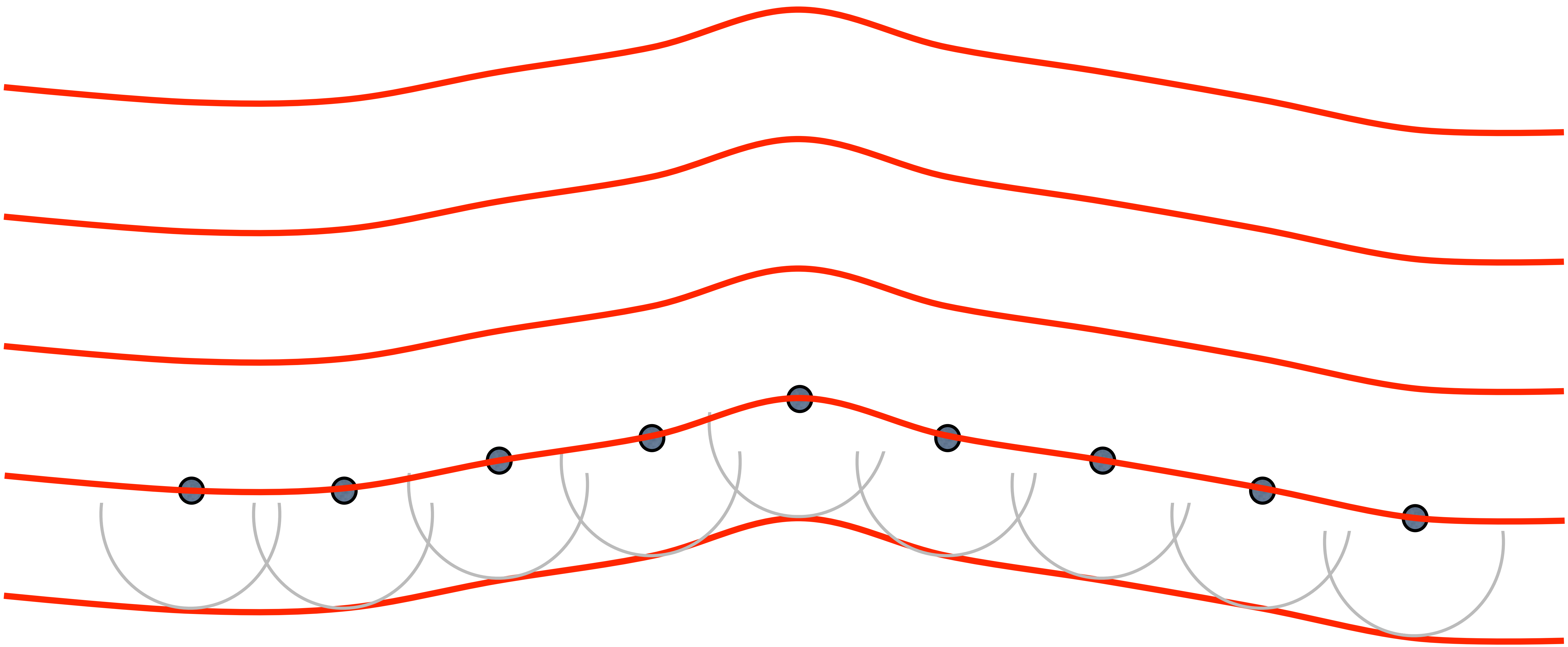
$$\sin(kx - \omega t) \rightsquigarrow \sin(kr - \omega t) \Longrightarrow kr = \text{constante}$$

Onda plana



$$\sin(kx - \omega t) \rightsquigarrow \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right) \Longrightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = \text{constante}$$

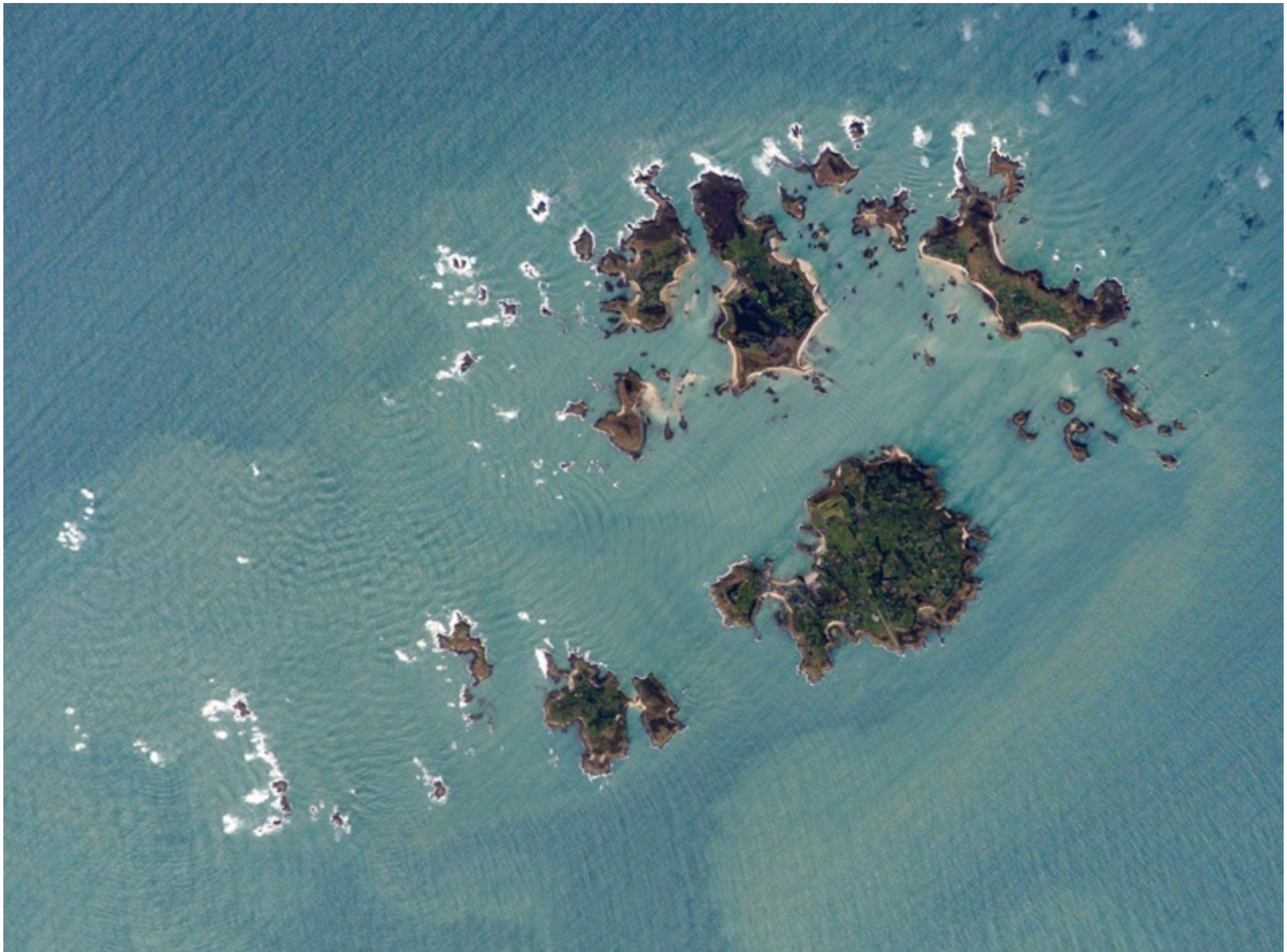
Princípio de Huygens



Cada ponto de uma frente de ondas é um centro emissor de ondas esféricas

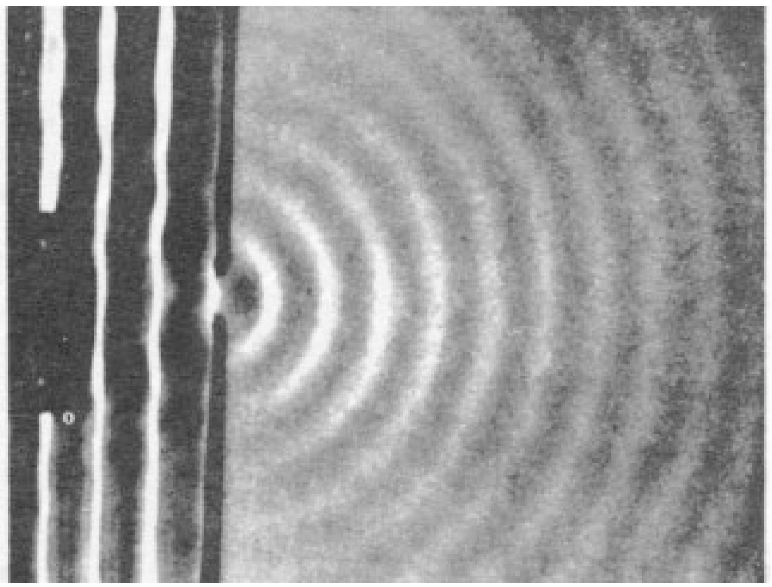
Princípio de Huygens

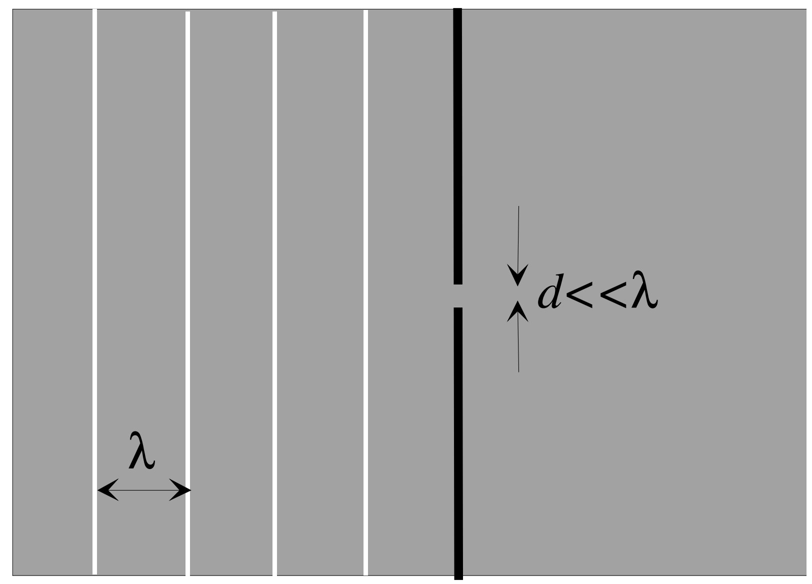
Princípio de Huygens

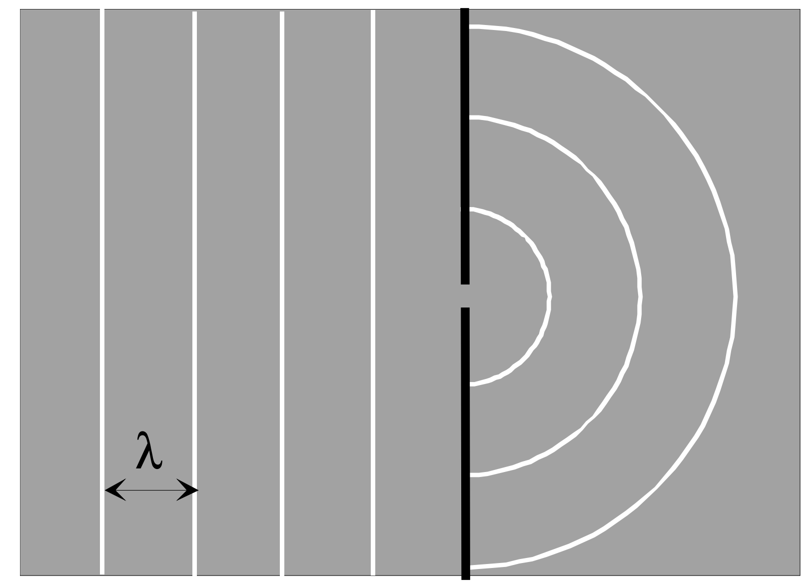


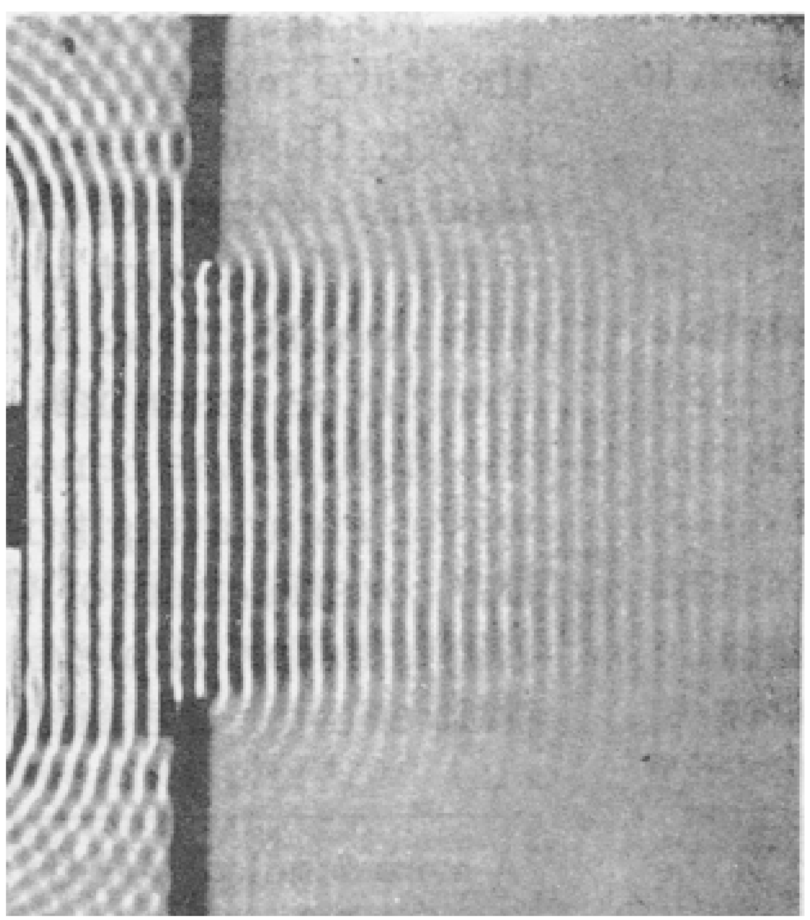
Princípio de Huygens

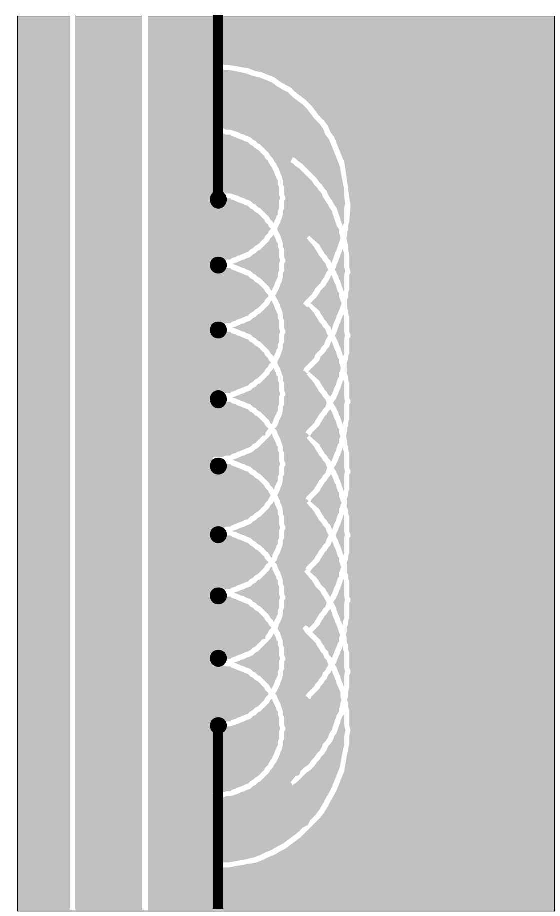
Princípio de Huygens



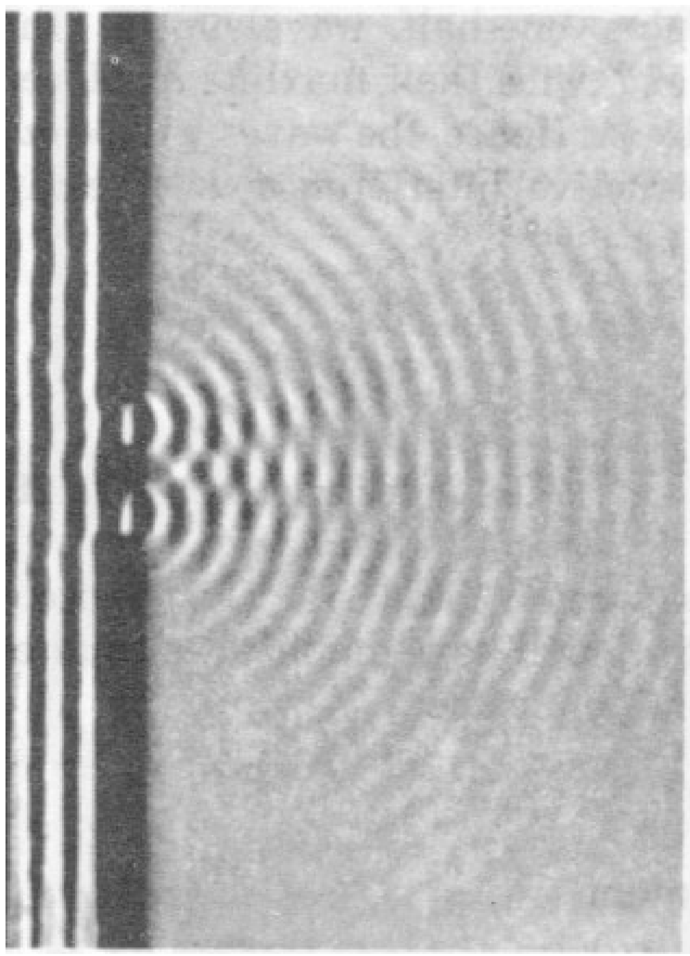


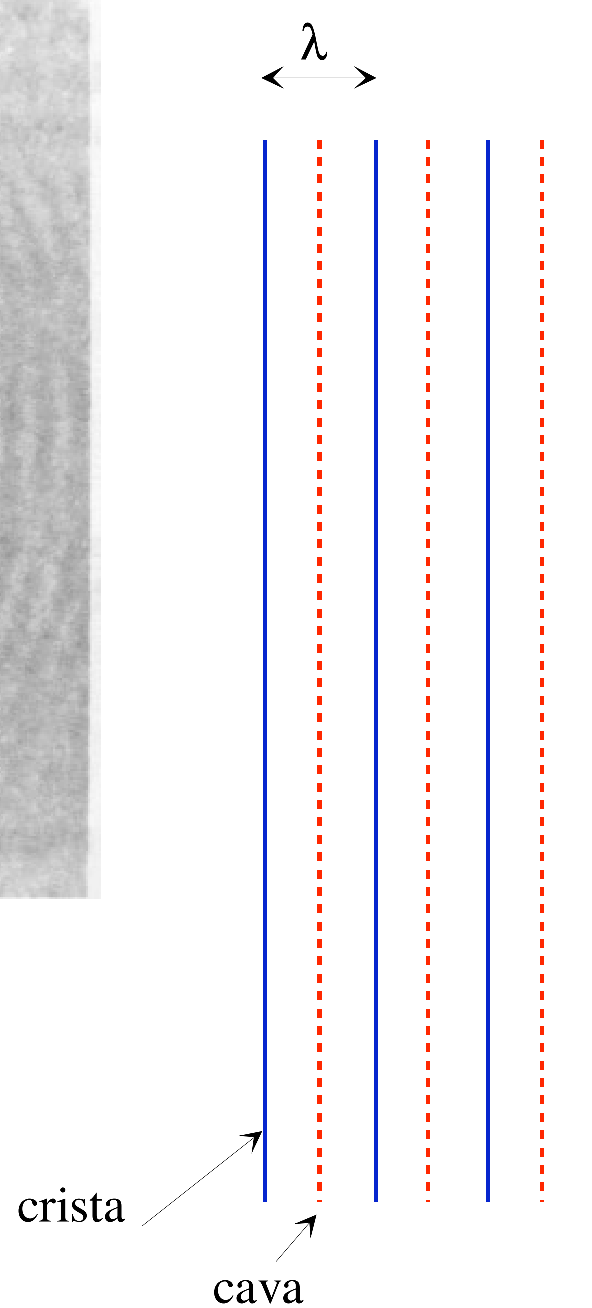




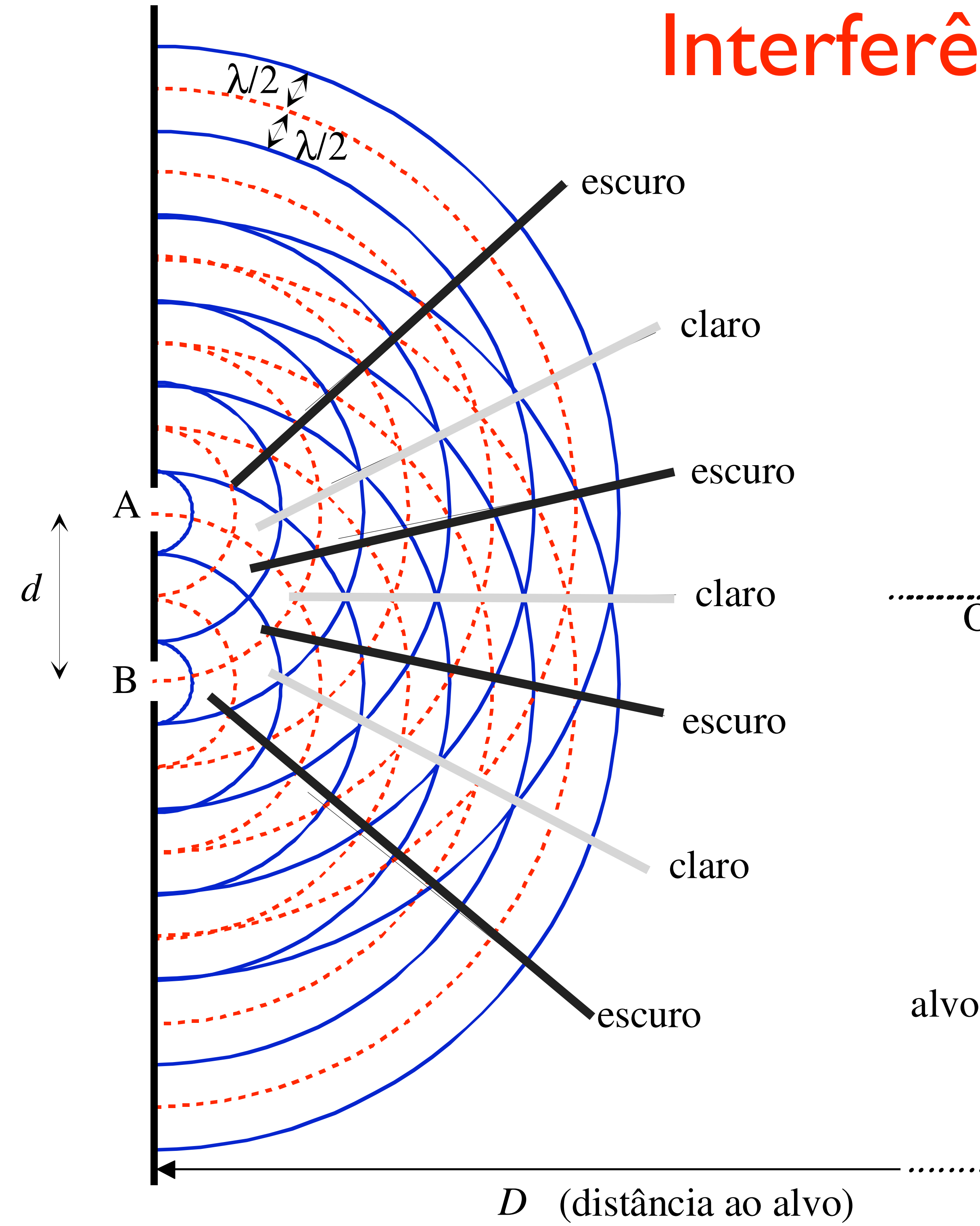


Experiência de Young

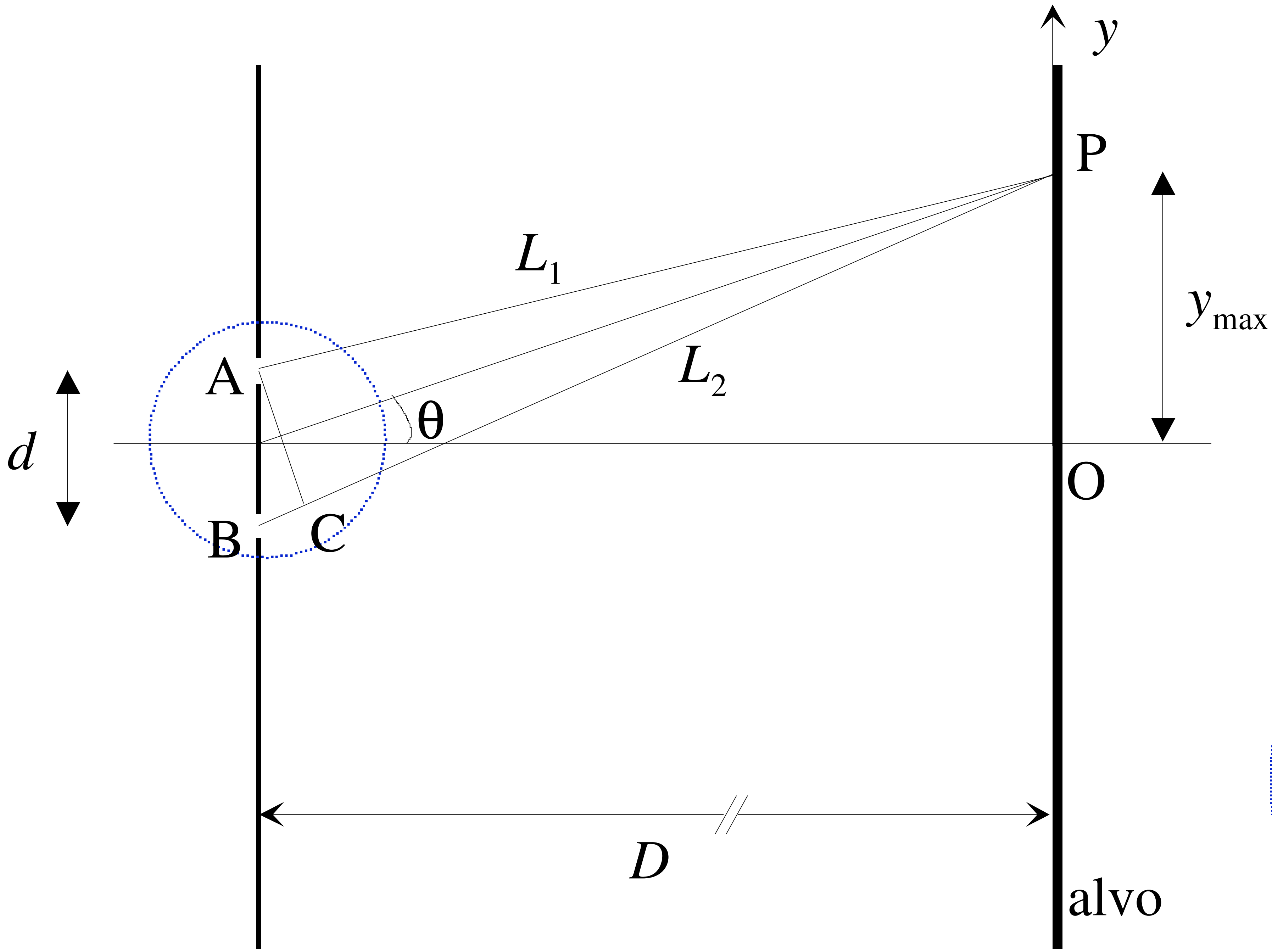




Interferência

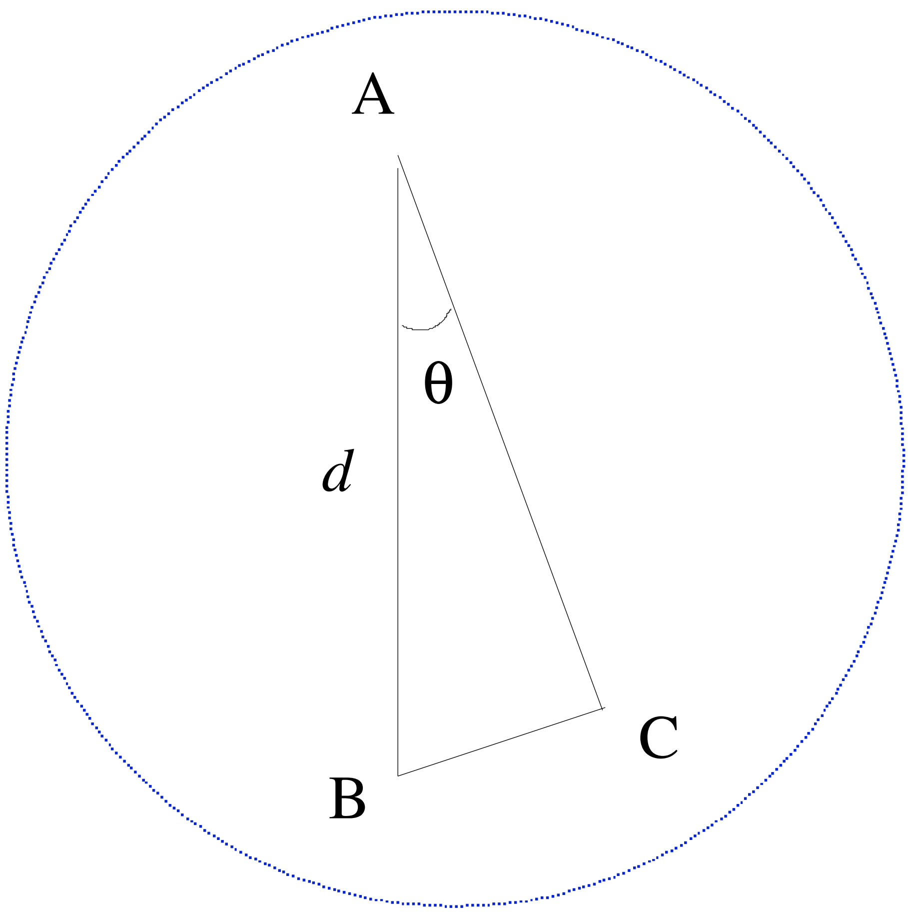


Fenda dupla



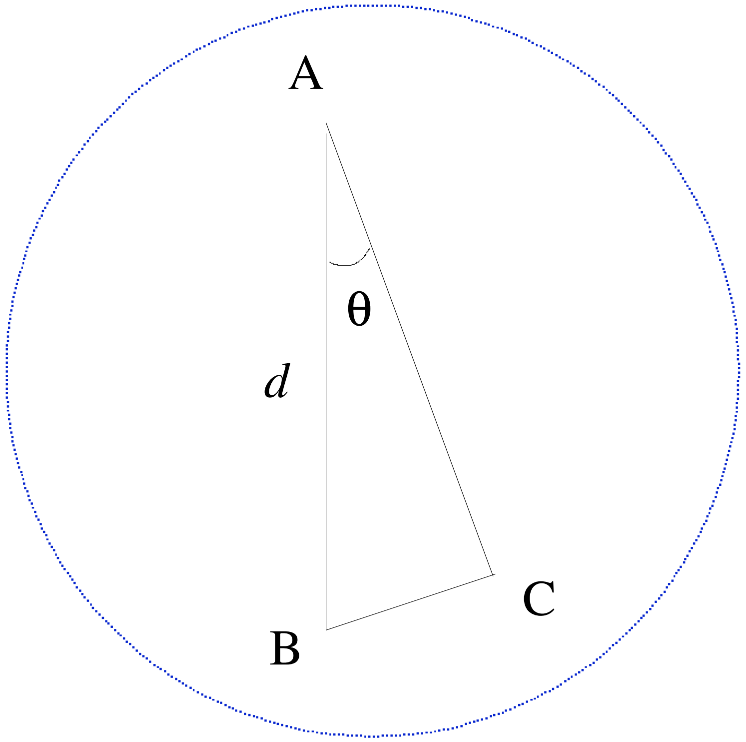
$$\lambda \sim d$$

$$D \gg d$$



$$\boxed{L_2 - L_1 = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

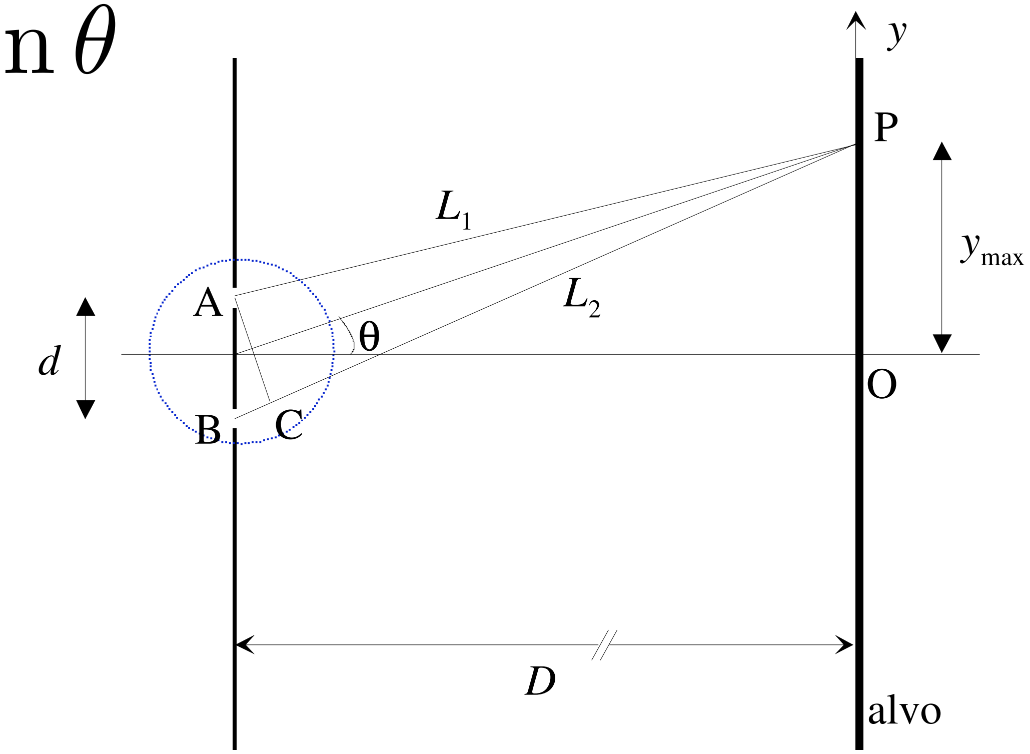
Fenda dupla



$$L_2 - L_1 = n\lambda, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\overline{BC} = L_2 - L_1 = d\sin\theta$$

$$d\sin\theta = n\lambda$$



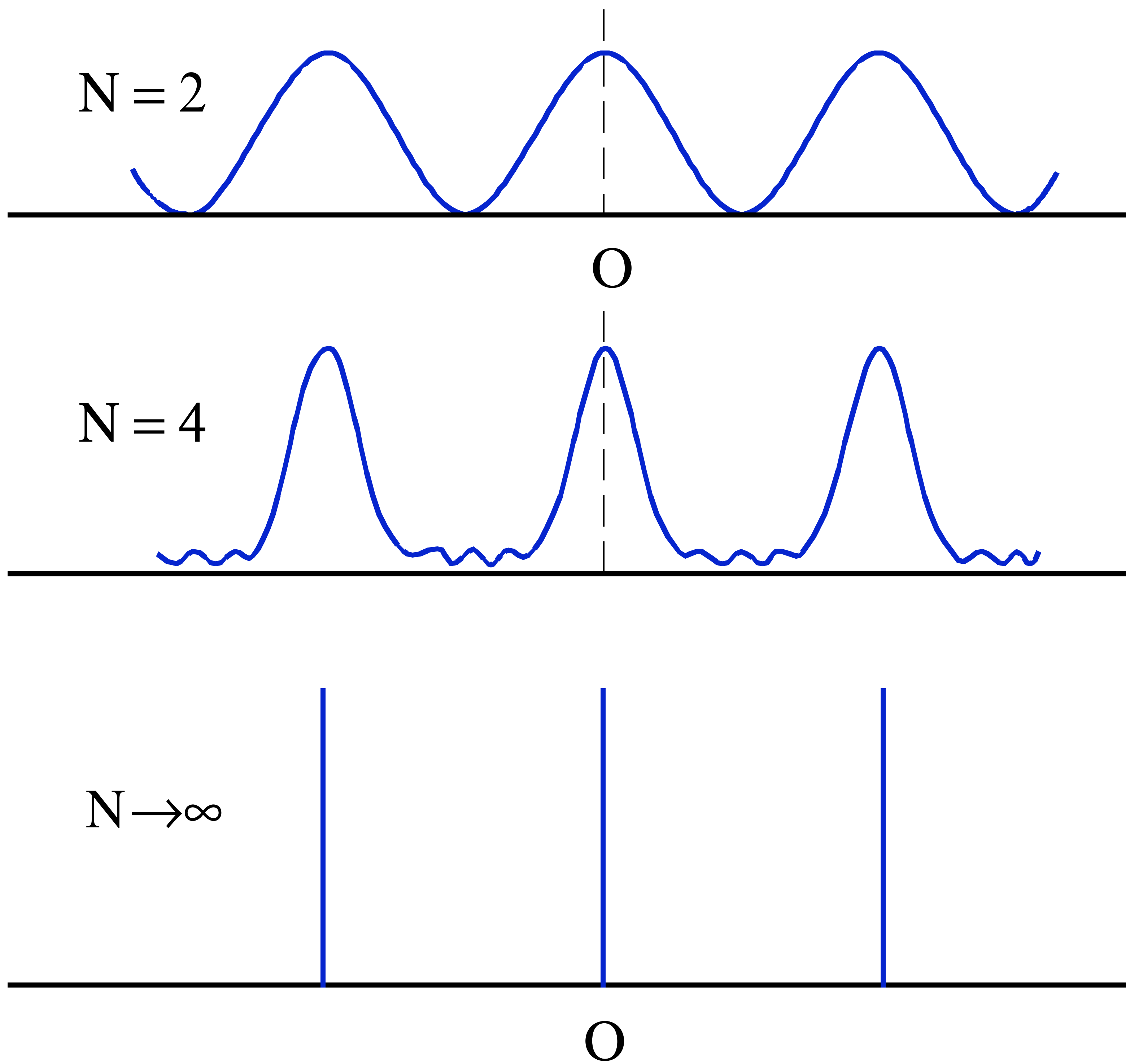
$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y_{\max}}{D} \quad \Rightarrow \quad y_{\max} = \frac{n\lambda D}{d} \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

Posição dos máximos

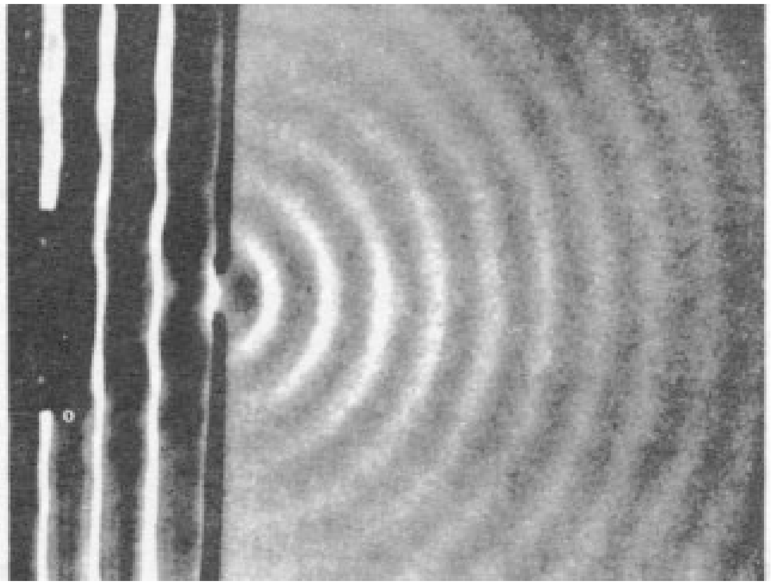
$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d}$$

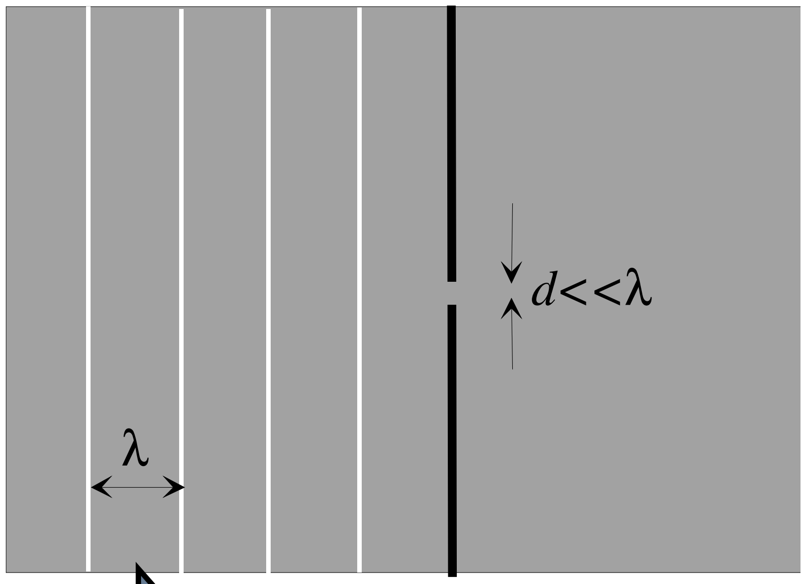
Distância entre máximos

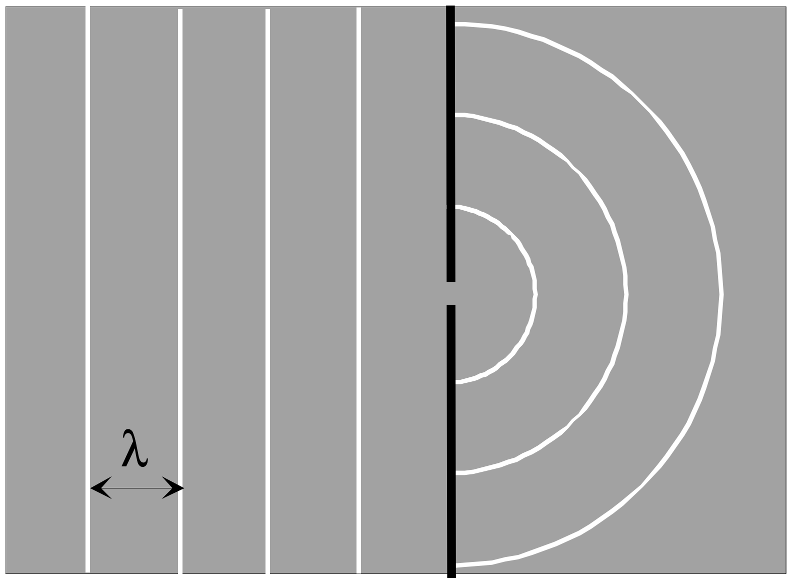
Fenda múltipla

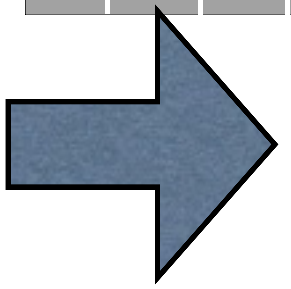


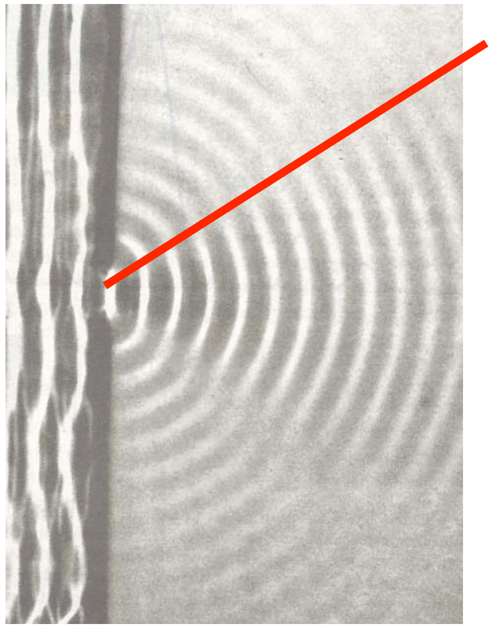
Difração







Onda esférica  A fenda é muito pequena

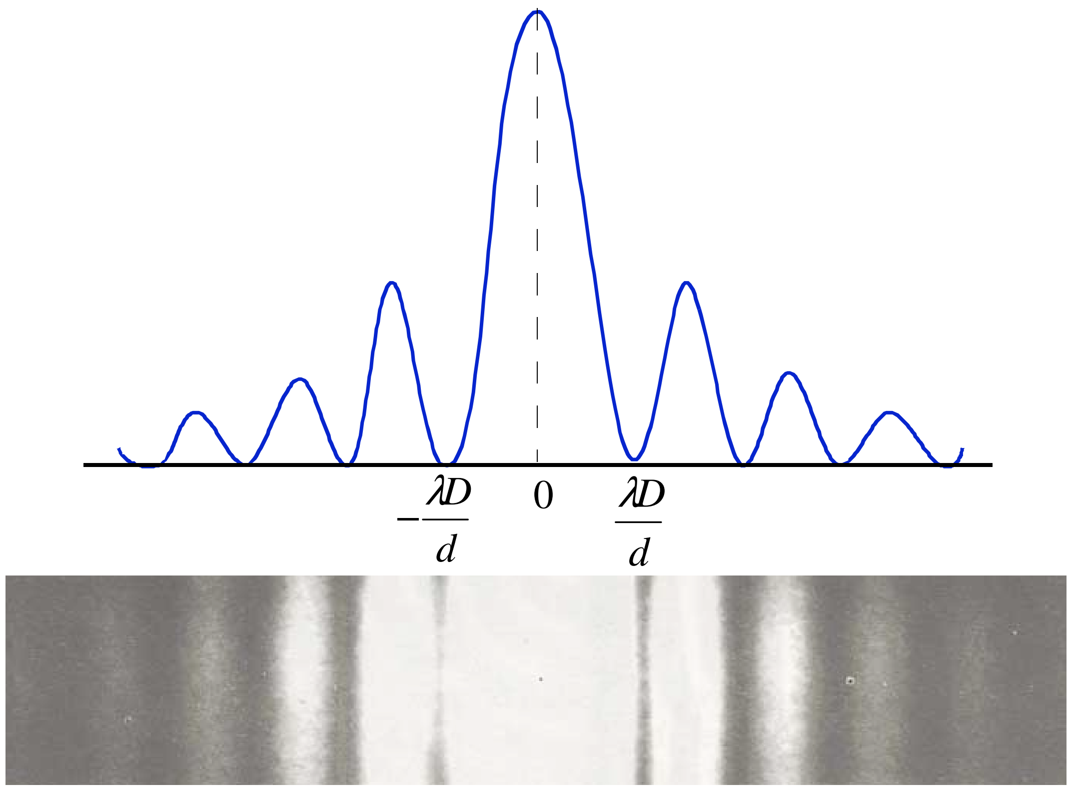


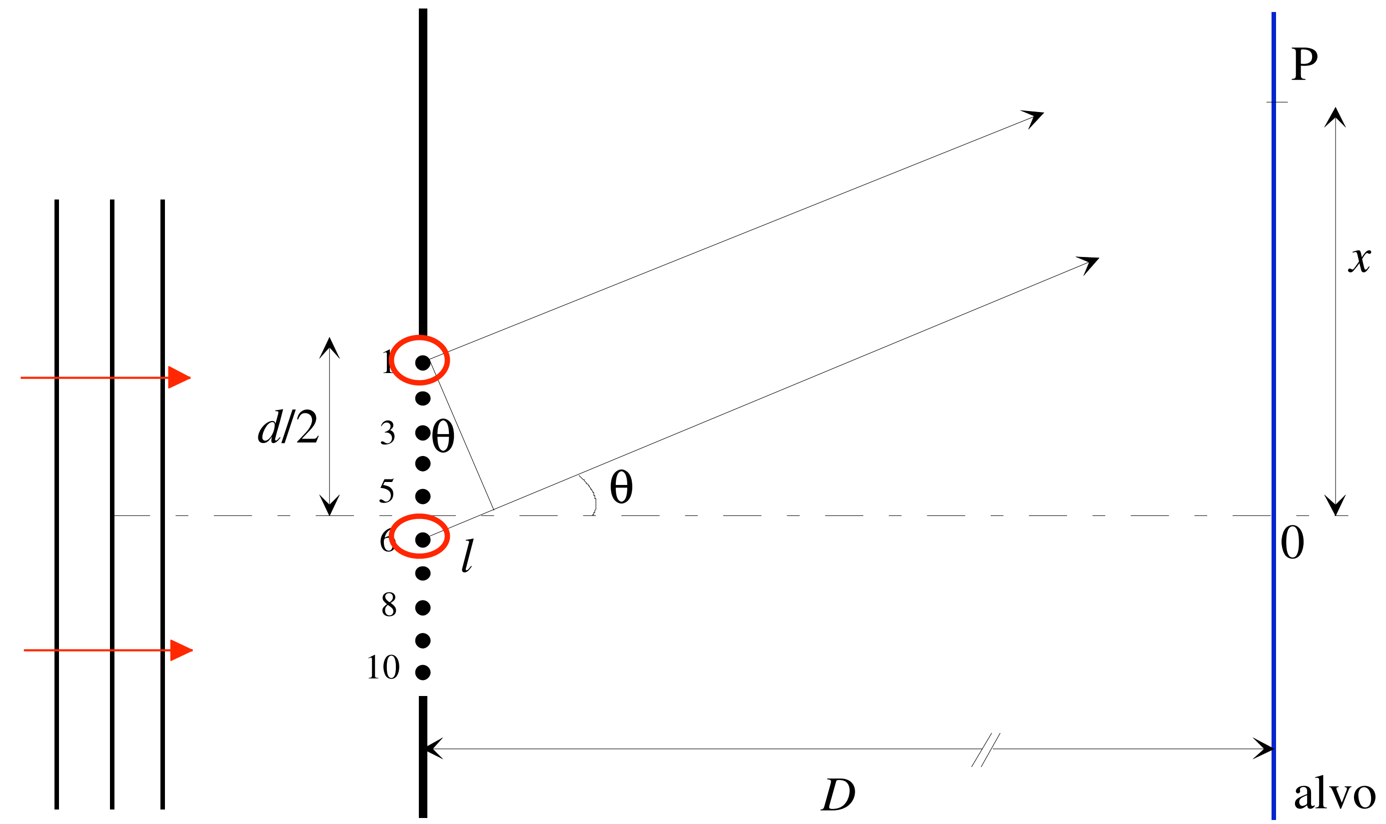
$d \approx \lambda$

Há várias ondas esféricas que interferem...

Difração

Difração





Interferência destrutiva: $l = n\lambda + \frac{\lambda}{2}$

$$l = \frac{d}{2}\sin\theta$$

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{x}{D}$$

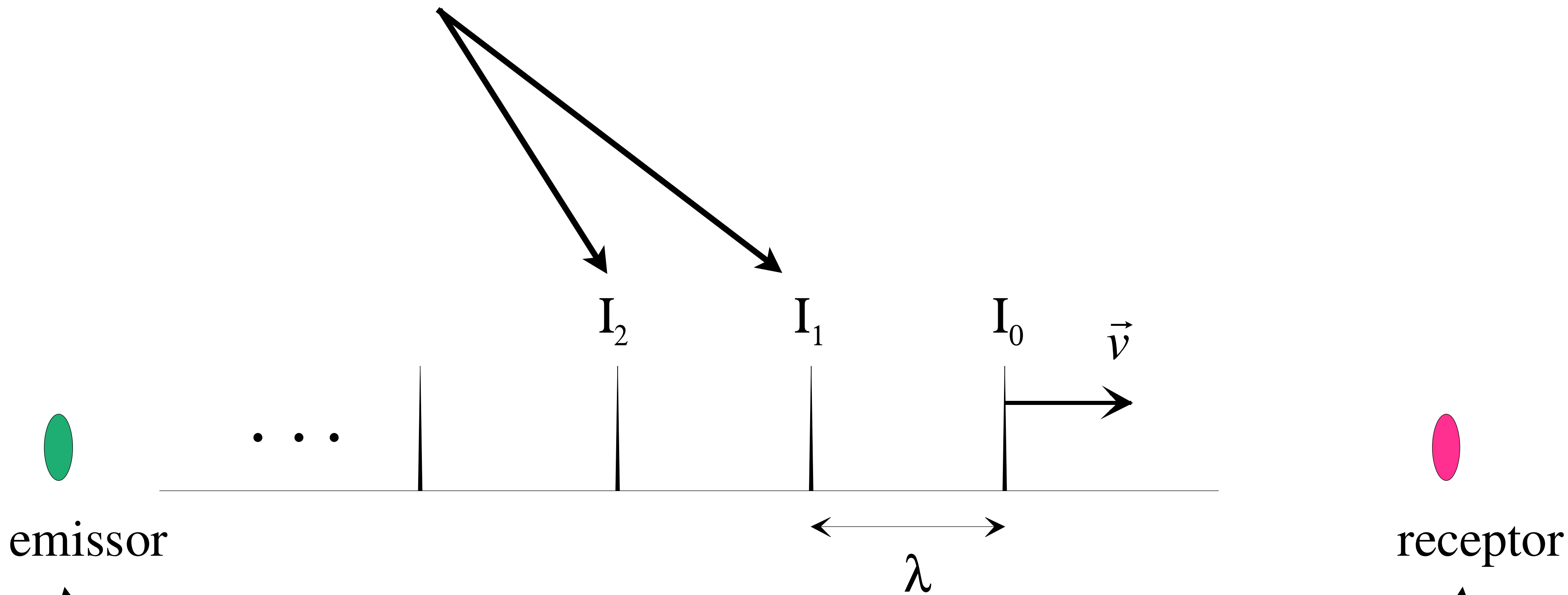
$$\boxed{x_{\min} = \pm\frac{n\lambda D}{d}}$$

$$n = 1, 3, 5, \ldots$$

Fonte sonora em movimento

- A velocidade de propagação de uma onda NÃO depende da velocidade da fonte ou do recetor
- O que se passa então quando a fonte ou o emissor se movem? A sirene das ambulâncias tem um som diferente à medida que elas passam por nós...

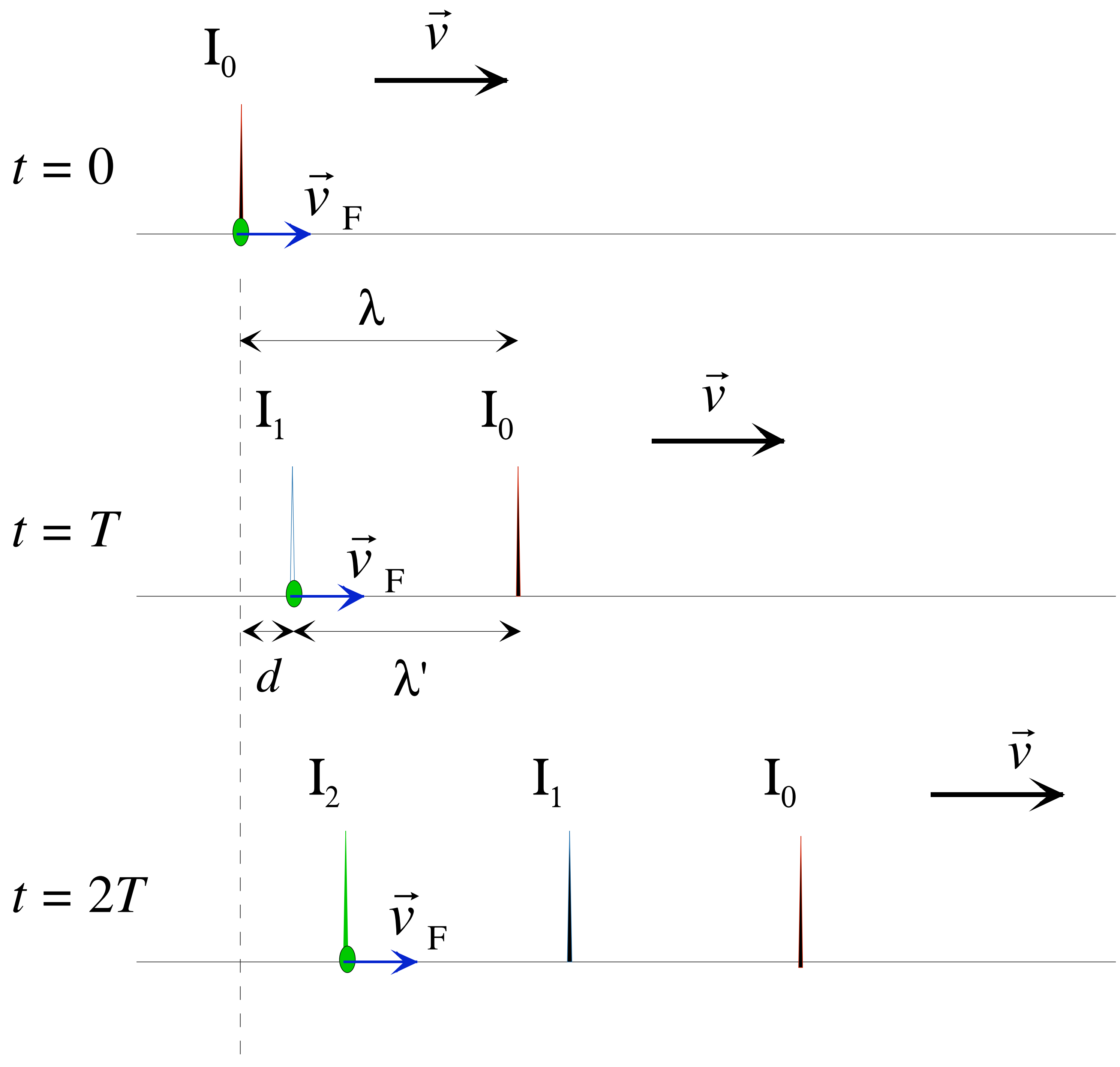
Pulsos emitidos de T em T segundos

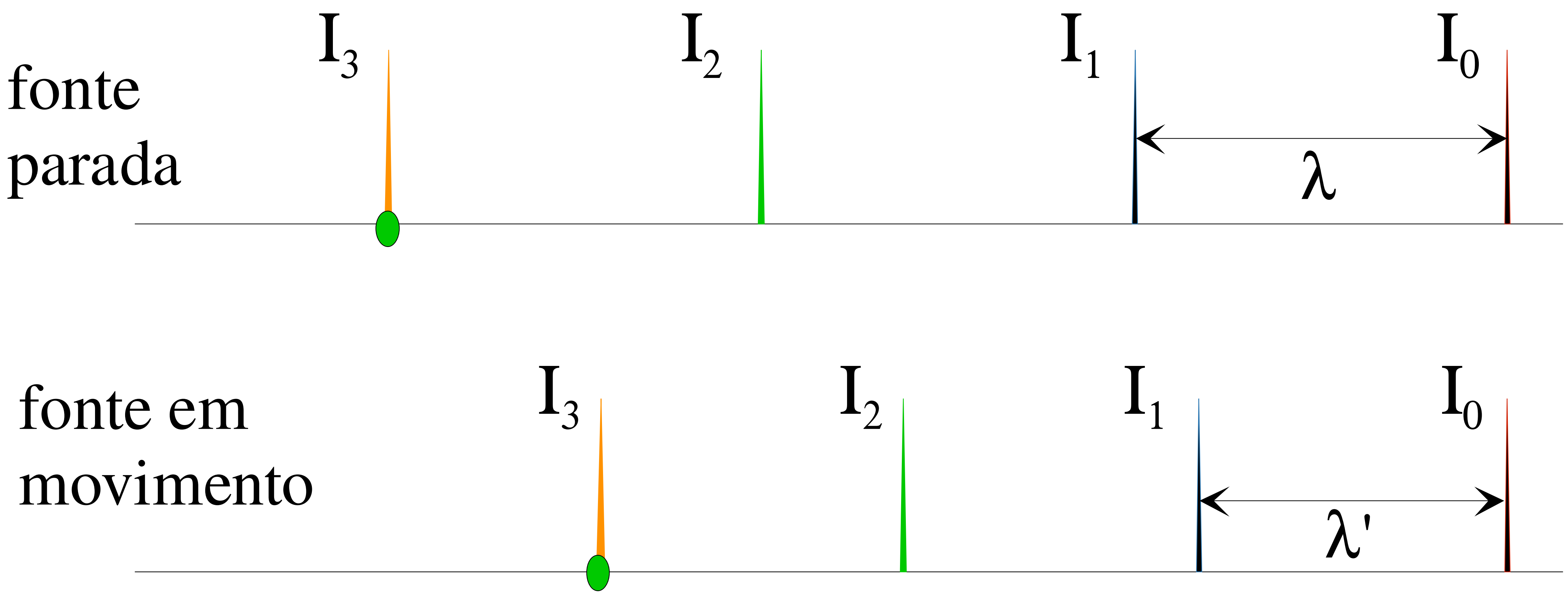


$$f = \frac{v}{\lambda}$$

$$f' = ?$$

Fonte em movimento

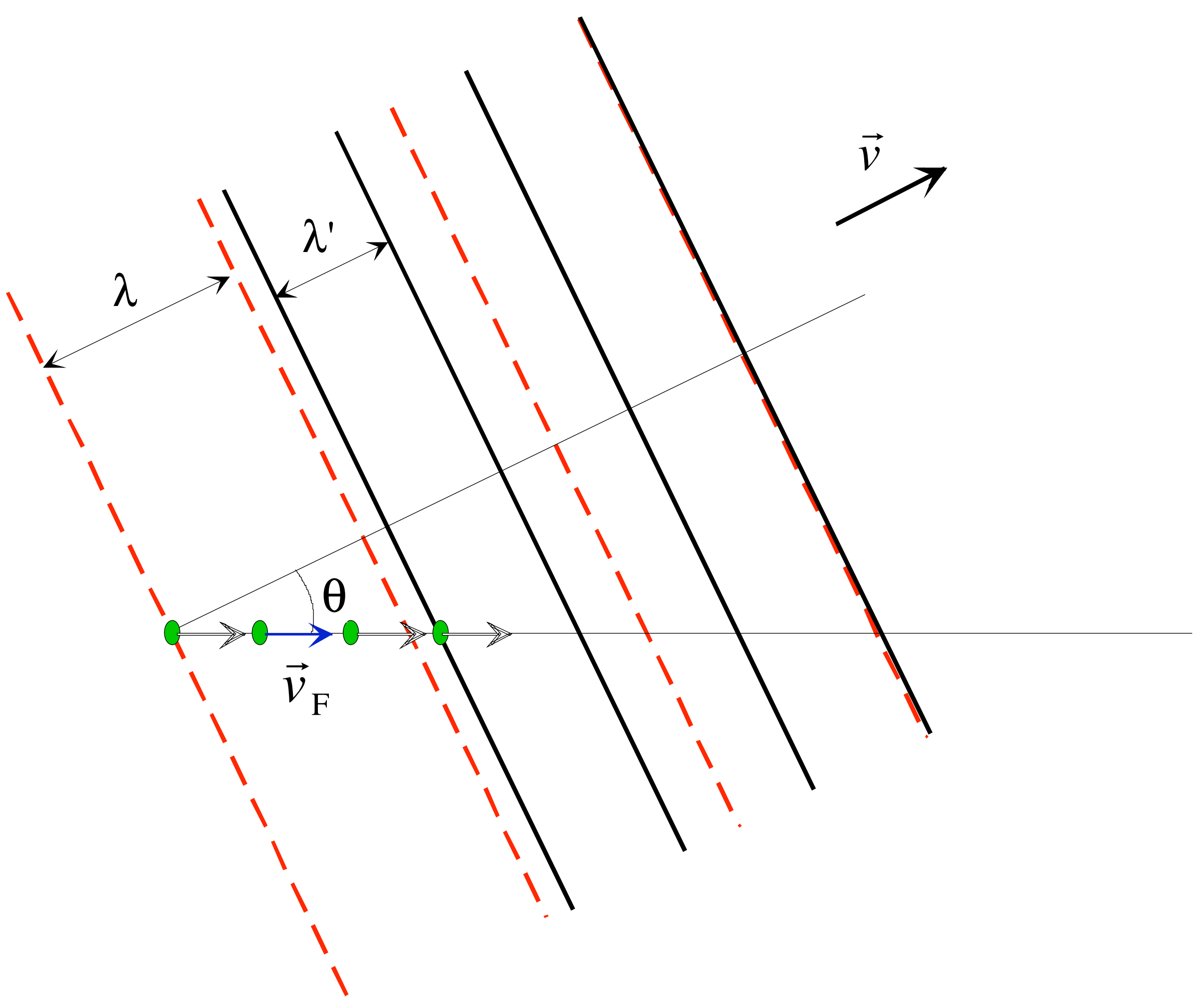




$$\lambda' = \lambda - v_F T \quad\Rightarrow\quad \lambda' = \lambda\left(1 - \frac{v_F}{v}\right) \quad\Rightarrow\quad f' = \frac{v}{v - v_F} f$$

Efeito Doppler

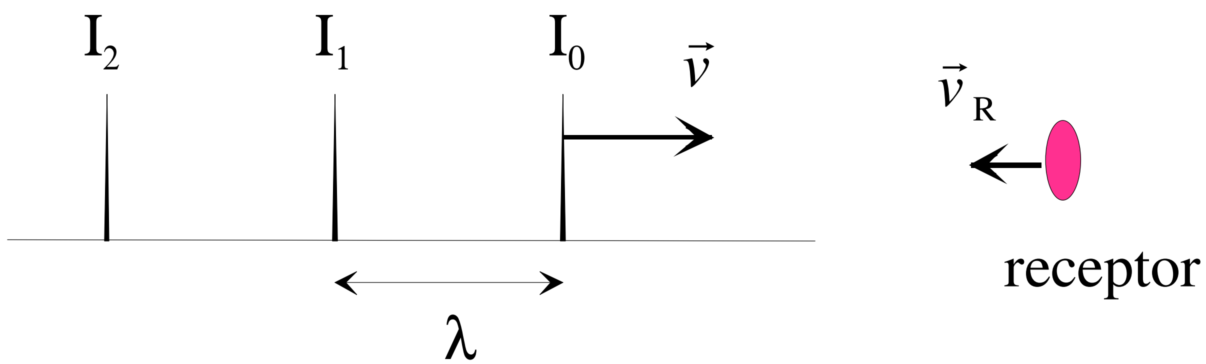
$$f' = \frac{v}{v \mp v_F} f \qquad \begin{cases} - & \text{A fonte aproxima-se} \\ + & \text{A fonte afasta-se} \end{cases}$$



$$f' = \frac{v}{v - v_F \cos\theta} f$$

Apenas a componente de v_F na direção de propagação afeta a frequência da onda

Recetor em movimento



Num intervalo Δt ao recetor chegam n' pulsos

$$n' = \frac{v + v_R}{\lambda}\Delta t$$

$$f' = \frac{n'}{\Delta t} = \frac{v + v_R}{\lambda} = \frac{v + v_R}{v} f$$

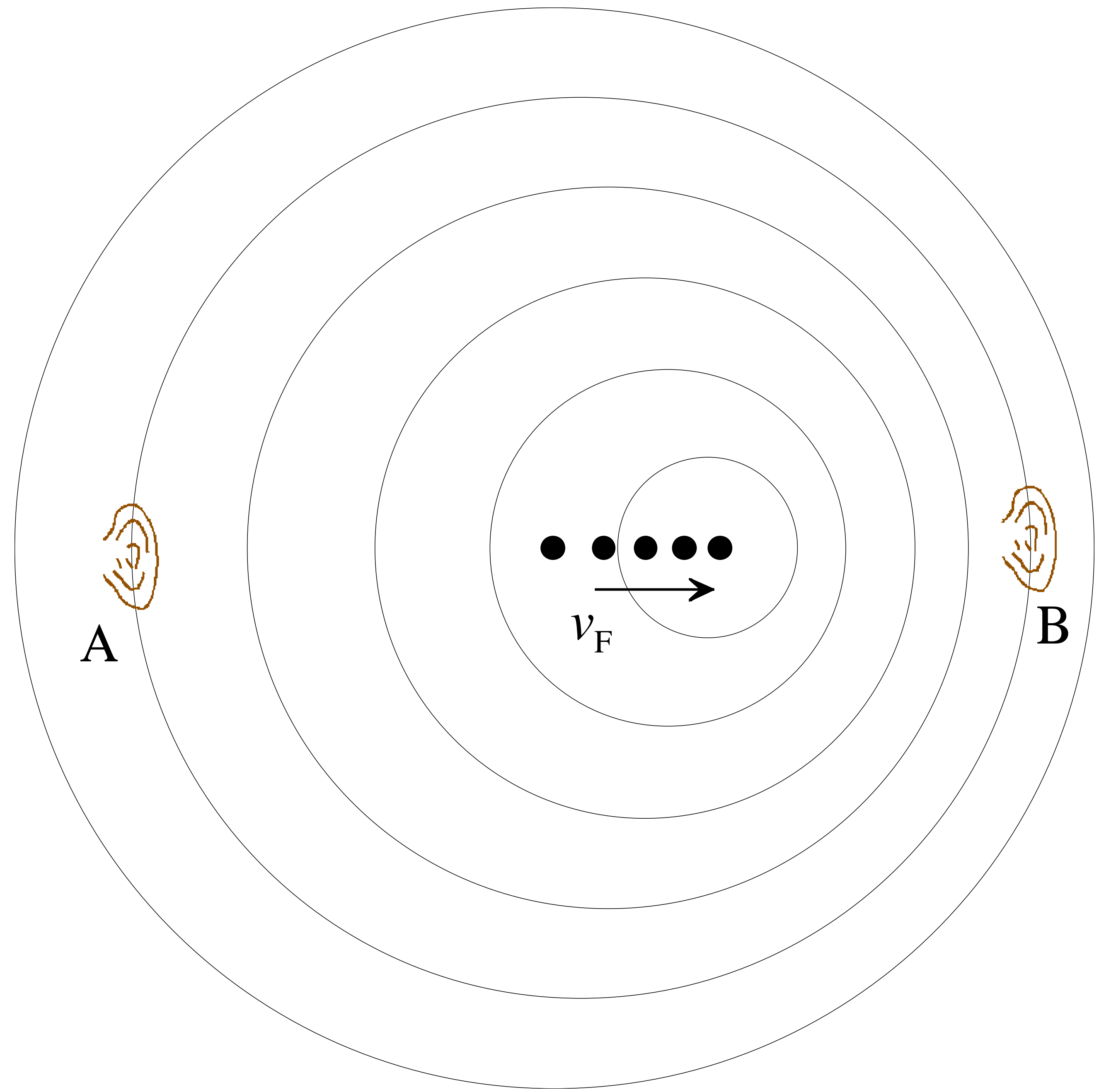
$$f' = \frac{v \pm v_R}{v} f$$

$$\begin{cases} + & \text{O recetor aproxima-se} \\ - & \text{O recetor afasta-se} \end{cases}$$

Efeito Doppler

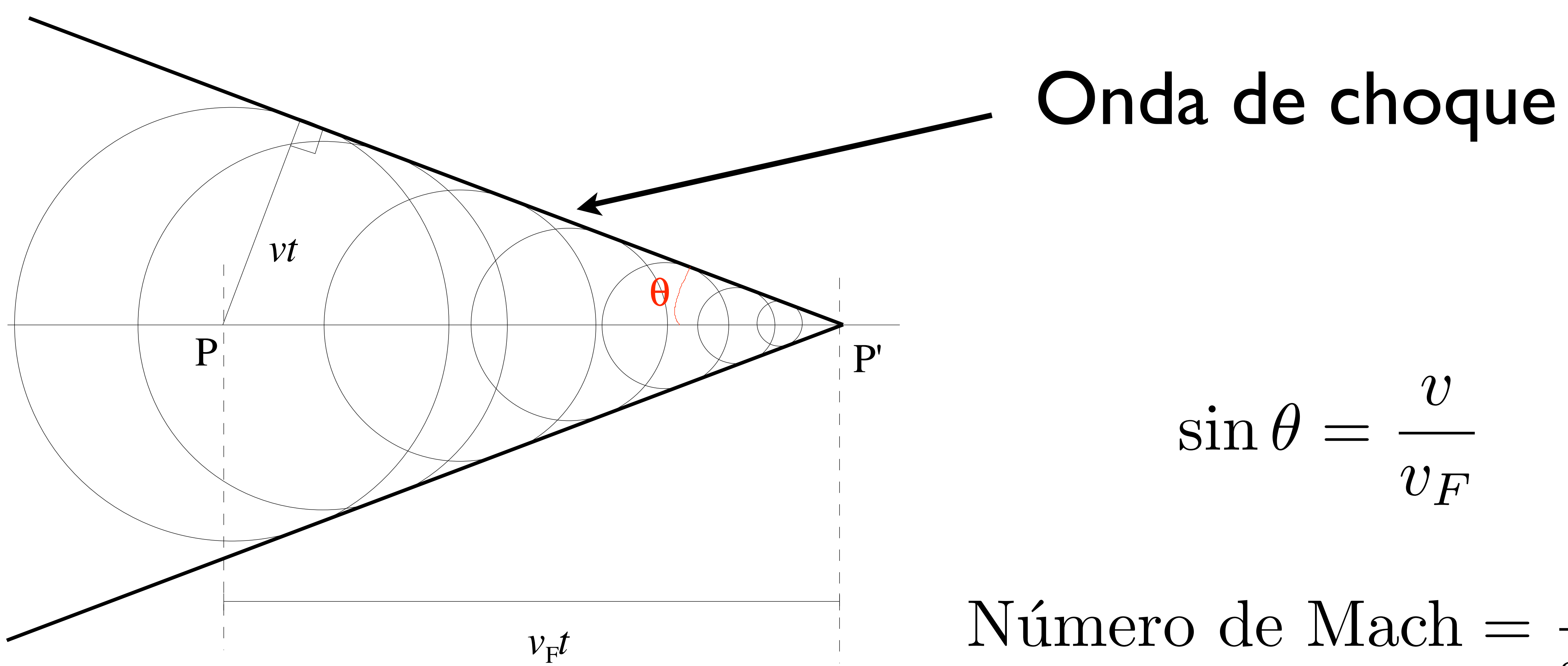
$$f' = \frac{v \pm v_R}{v \mp v_F} f$$

$$\left(f' = \frac{v \pm v_R \cos\theta_R}{v \mp v_F \cos\theta_F} f \right)$$



E se $v_F \geq v$?

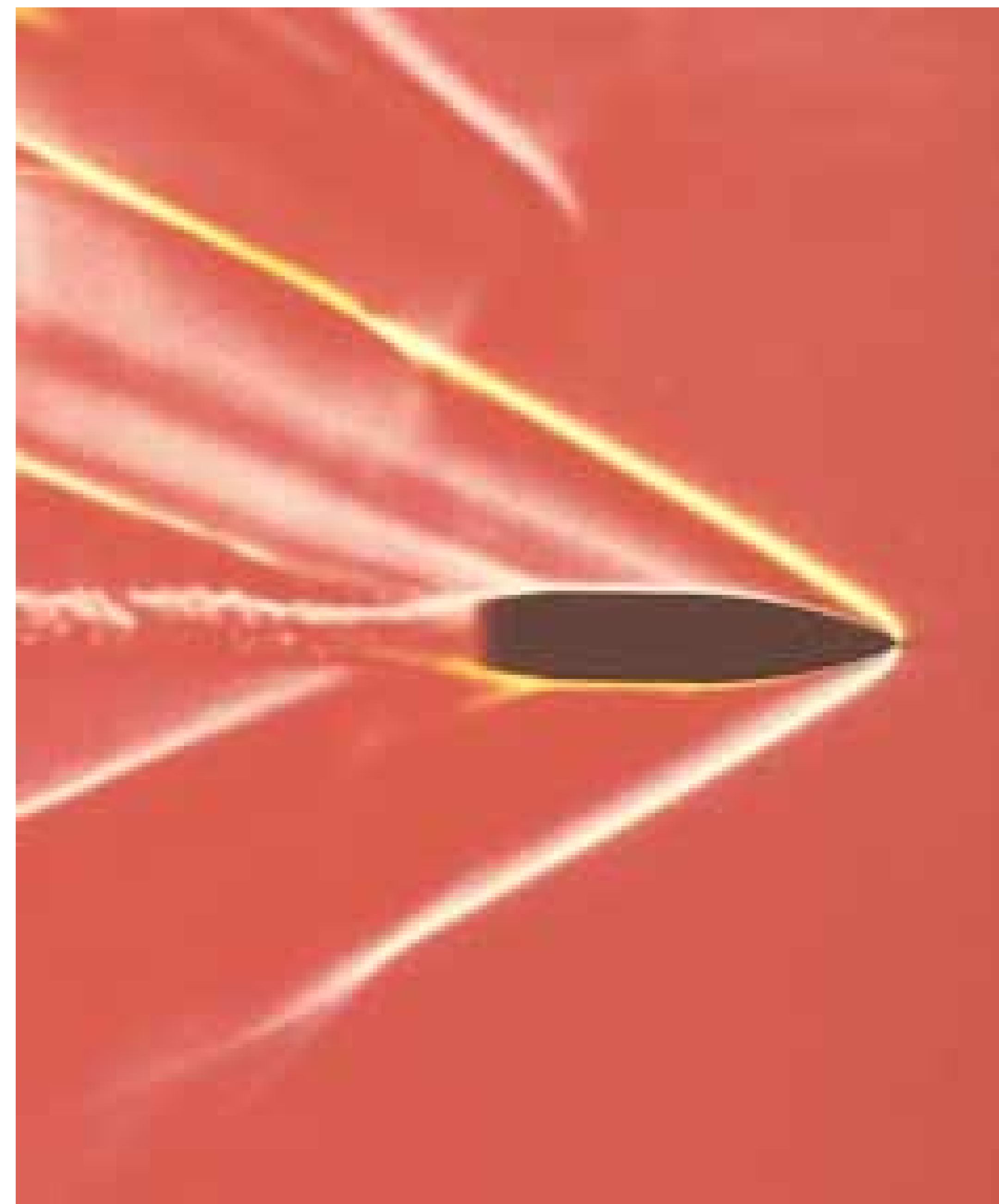
Se v_F=v, a perturbação é produzida num ponto onde já está presente...



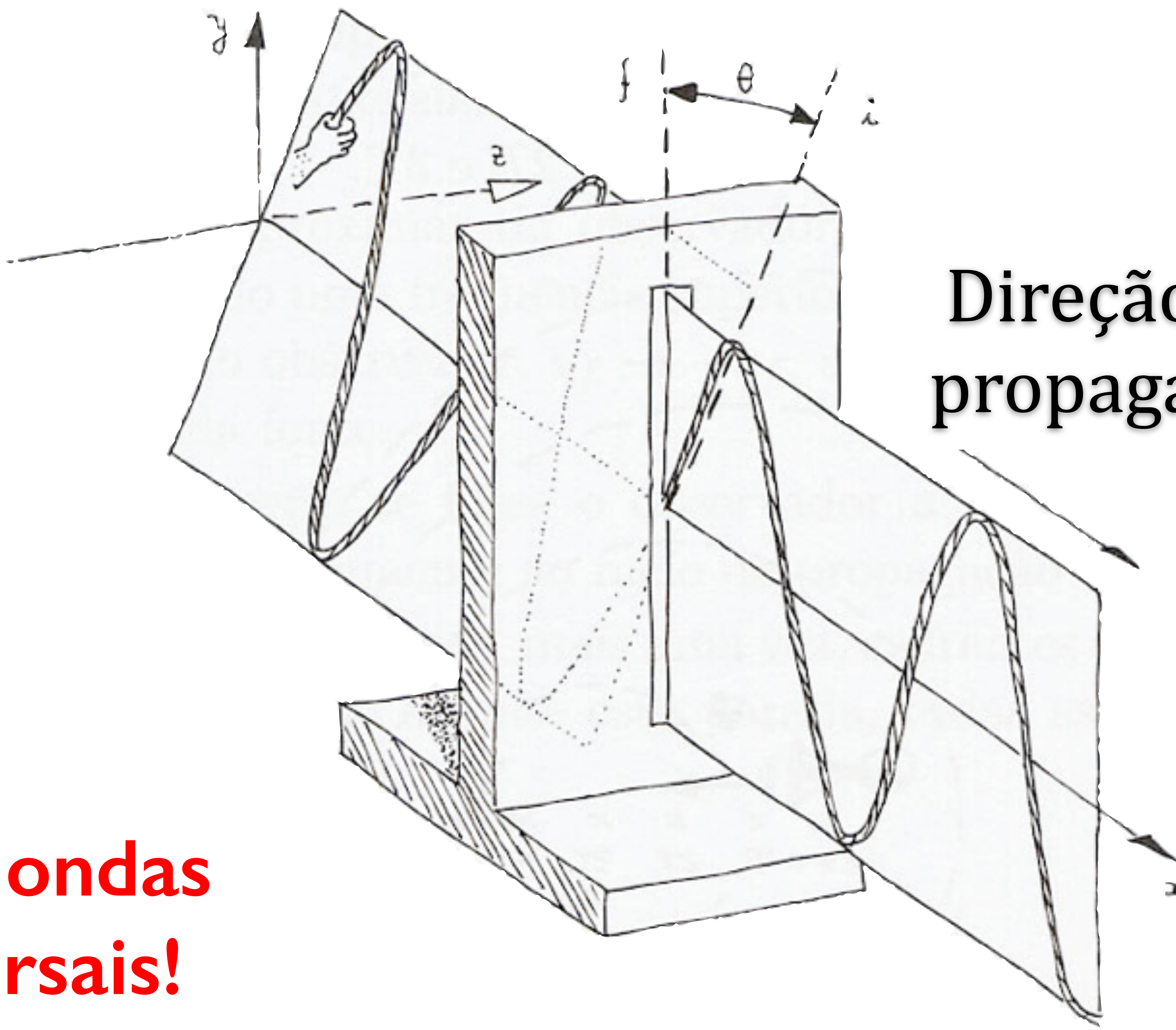
$$\sin\theta = \frac{v}{v_F}$$

$$\text{Número de Mach} = \frac{1}{\sin\theta}$$

Ondas de choque



Polarização



Direção de propagação

Só para ondas transversais!