Pedro Vieira Alberto

APONTAMENTOS DE FUNDAMENTOS DE FÍSICA MODERNA

Coimbra 1995

1. INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE RESTRITA

§ 1.1 PRINCíPIO DE RELATIVIDADE DE GALILEU E O PROBLEMA DO ÉTER: EXPERIÊNCIA DE MICHELSON-MORLEY

Ao viajar de carro, de comboio, de avião ou outro meio de transporte, todos nós sabemos que nos momentos de travagem ou de arranque sentimos exercer sobre nós forças que nos empurram para frente ou para trás, e que são mais ou menos intensas consoante a travagem ou o arranque é mais ou menos brusco. Também quando se descrevem curvas sentimos forças que nos empurram para a esquerda ou para a direita, consoante a curva é descrita para a direita ou para a esquerda, respectivamente. Em todas estas situações houve uma alteração de velocidade, quer em módulo (aceleração ou travagem em linha recta) quer em direcção (ao descrever uma curva) ou mesmo em módulo e direcção (travagem ou aceleração em curva). No entanto, fora desses momentos, ou seja, quando a velocidade do carro, comboio ou avião não varia, tudo se passa como se estivéssemos sentados na nossa casa, isto é, não sentimos sobre nós nenhum efeito que possa ser imputado ao facto de nos estarmos a deslocar num meio de transporte. O mesmo se passa em relação a qualquer outro fenómeno mecânico dentro do meio de transporte, isto é, que envolva forças exercidas sobre objectos e correspondentes movimentos, como seja atirar uma bola ao ar ou simplesmente o acto de nos levantarmos do assento e caminharmos no corredor do comboio ou avião. De facto, se se conseguisse eliminar todas as vibrações do meio de transporte e as janelas estivessem fechadas, nós não poderíamos saber se estavámos em movimento ou parados, *desde que a velocidade do meio de transporte se mantivesse constante.*

As ideias expostas anteriormente podem ser traduzidas dizendo que as leis da Mecânica, e em particular a equação fundamental da Dinâmica, $\vec{F} = m\vec{a}$, não dependem do estado de movimento do observador. Concretizando, se considerarmos o sistema de referência (ou referencial) S da figura 1 (lembrar que para descrevermos qualquer movimento o temos que referir a um sistema de eixos, ou *um referencial*) como sendo um sistema de referência inercial (isto é, um sistema de referência para o qual a equação referida atrás é válida *),

* Dizendo de outra maneira, podemos definir um sistema de referência inercial ou de inércia como um sistema de referência em relação ao qual todos os corpos livres (isto é, sobre os quais não actua nenhuma força) se deslocam com velocidade uniforme ou estão em repouso.

um sistema S' que se desloque com uma velocidade $\vec{v} = v\hat{\imath}$ segundo eixo dos xx é também um sistema inercial, uma que as leis da Mecânica são também válidas para ele. O mesmo poderia ser dito, como é óbvio, para um sistema de referência que se desloque em relação a S com uma velocidade de módulo, direcção e sentido *quaisquer*, desde que constantes.

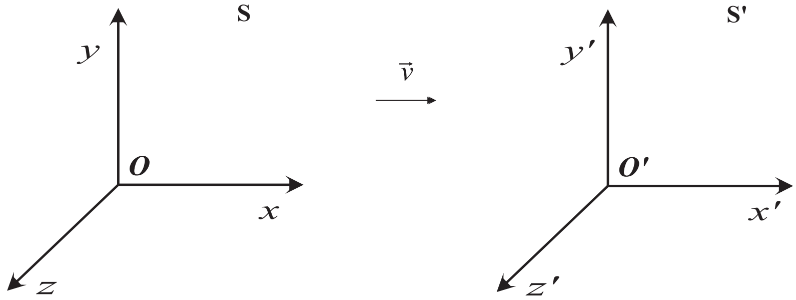

fig. 1

O que dissemos atrás é por vezes referido na literatura como o *Princípio da Relatividade de Galileu*, que podemos enunciar então da seguinte maneira:

As leis da Mecânica são as mesmas em qualquer sistema de referência inercial.

Repare-se que ao dizer "qualquer sistema de referência inercial" se inclui automaticamente *todos* os sistemas de referência que se desloquem com velocidades constantes arbitrárias relativamente a um determinado sistema de inércia.

Tudo isto decorre intuitivamente da nossa experiência diária e como tal é facilmente aceitável por todos. Tal era o caso também no sec. XIX, em que as leis da Mecânica eram já sobejamente conhecidas e aplicadas. No entanto, nesse século um outro tipo de fenómenos naturais muito importante foi estudado e estabelecidas as leis que o regem: estamos a referir--nos ao electromagnetismo. Na verdade, em 1864 Maxwell propôs um conjunto de equações que regem o campo eléctrico e magnético na presença de distribuições de cargas e correntes. Acontece que essas equações, na ausência de cargas e correntes (diz-se "no vazio"), dão origem a equações de onda para os campos eléctrico e magnético, ou seja, a teoria de Maxwell prevê que o campo electromagnético se propage como uma onda. A velocidade de propagação dessas ondas no vazio é um certo número 'c' que se verificou ser igual à velocidade de propagação da luz no vazio. Isto levou Maxwell a conjecturar que a luz fosse constituída por ondas electromagnéticas, o que mais tarde foi confirmado experimentalmente por Hertz. Esta descoberta levou a que se considerasse o problema do suporte material para a propagação da luz. Na verdade, era sabido que todos os fenómenos ondulatórios conhecidos necessitavam de um meio para se propagar. Por exemplo, quando se atira uma pedra à água num lago, o movimento vibratório das moléculas de água no ponto de impacto transmite-se às moléculas vizinhas pelo facto de haver forças entre as moléculas, o que dá origem às ondas circulares que observamos. O mesmo se passa em relação aos sons que ouvimos: se não houvesse um meio material entre nós e a fonte do som – o ar – não o poderíamos ouvir. Isto levou a que se considerasse a existência de um "éter", uma substância existente em todo o espaço, que serviria de suporte à propagação da luz. Essa substância tinha propriedades contraditórias: deveria ser sufientemente pouco densa para que não se pudesse detectar, mas suficientemente viscosa para poder assegurar uma velocidade de propagação tão grande como $c = 3 \times 10^8$ m/s. Além da sua função como suporte das ondas luminosas, o éter não tinha mais nenhuma propriedade que pudesse ser observável, o que desde logo podia levantar suspeitas em relação à sua própria existência. Havia, no entanto, uma consequência muito importante da existência do éter: ele fazia com que um determinado referencial de inércia se destacasse dos outros — aquele em relação ao qual o éter estava em repouso, uma vez que só em relação a esse é que a luz teria a velocidade c referida atrás. Na verdade, num referencial que se movesse com uma certa velocidade de módulo v em relação ao éter a luz (propagando-se na mesma direcção e sentido que o referencial) teria uma velocidade de módulo $c - v$, tal como acontece com um passageiro de um carro que se desloca à velocidade de 60 km/h que vê outro carro com velocidade de 80 km/h a ultrapassá-lo à velocidade (relativa) de 20 km/h.

Dada a relação íntima da constante c com as constantes electromagnéticas do vazio, podia-se concluir que a existência do éter impedia a extensão do Princípio da Relatividade enunciado atrás para os fenómenos luminosos, e, por arrastamento, aos fenómenos electromagnéticos, uma vez que os sistemas de inércia não eram todos equivalentes.

A teoria do éter e a consequente existência de um referencial absoluto, relativamente ao qual o éter estaria em repouso, levou a que se realizassem várias experiências procurando determinar o movimento da Terra relativamente ao éter, através da medição de diferenças na velocidade de propagação da luz em direcções diferentes. A mais célebre dessas experiências foi a de Michelson e Morley, dois físicos americanos, realizada em 1887.

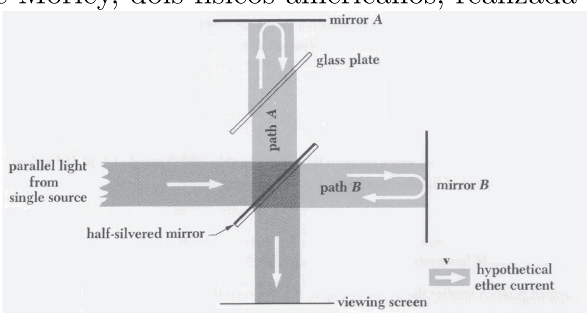

fig. 2

O esquema simplificado da experiência está representado na figura 2. Usando um vidro semi-espelhado, Michelson e Morley podiam fazer com que um feixe de luz se dividisse em dois percorrendo a mesma distância mas em direcções perpendiculares, usando outros dois espelhos colocados perpendicularmente um ao outro e a distância igual ao vidro central. Desta maneira os dois feixes voltam a encontrar-se num ecrã onde se pode visionar a sua interferência *. Vamos supôr que a distância entre o vidro semi-espelhado e cada um dos espelhos e o ecrã é D, e que a velocidade da Terra relativamente ao éter é $-\vec{v}$, isto é, que o éter tem a velocidade $\vec{v}$ em relação à Terra (ver figura 2). O feixe incidente é tal que tem a mesma direcção e sentido de $\vec{v}$. A velocidade (em módulo) do feixe A relativamente à Terra antes de se reflectir no espelho A há de ser (ver figura 3)

$$|\vec{c}+\vec{v}| = c\cos\theta = c\sqrt{1-v^2/c^2}\,,$$

onde $\vec{c}$ é a velocidade do feixe A relativamente ao éter (cuja grandeza é igual a c). Depois de se reflectir, a velocidade do feixe A relativamente à Terra será

$$|\vec{c}\,'+\vec{v}| = c\cos\theta = c\sqrt{1-v^2/c^2}\,.$$

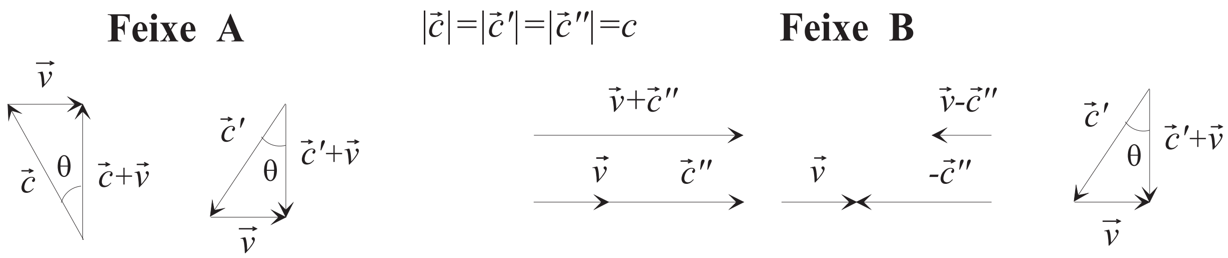

fig. 3

O tempo que o feixe A demora a chegar ao ecrã depois de se reflectir no vidro semi-espelhado será, então,

$$t_A = \frac{D}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{2D}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{3D}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{1.1}$$

---

* Como veremos mais tarde, a natureza ondulatória da luz faz com que dois feixes de luz ao se encontrarem num mesmo ponto possam interferir, isto é, as suas intensidades se possam somar ou subtrair, fazendo com que o feixe resultante apareça a um observador colocado nesse ponto mais claro ou mais escuro, respectivamente.

Durante o seu percurso até atingir o ecrã, o feixe B tem três velocidades distintas: antes de ser reflectido pelo espelho B, depois de ser reflectido nesse espelho, e depois de voltar a ser reflectido no vidro semi-espelhado (ver figura 2). No primeiro caso, dado que a luz tem a mesma direcção e sentido oposto ao do movimento da Terra, a velocidade da luz relativamente à Terra será (em módulo) $c+v$. No 2º percurso será $c-v$ e no 3º será idêntica à do feixe A no mesmo percurso, ou seja, $c\sqrt{1-v^2/c^2}$ (ver figura 3). Assim o tempo que B gasta desde a primeira incidência no vidro semi-espelhado até atingir o ecrã será

$$t_B = \frac{D}{c-v} + \frac{D}{c+v} + \frac{D}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2D}{c(1-v^2/c^2)} + \frac{D}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{1.2}$$

Subtraindo a este tempo t_A dado pela eq. (1.1), obtém-se

$$t_B - t_A = \frac{2D}{c(1-v^2/c^2)} - \frac{2D}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \, .$$

Isto significa que os dois feixes não chegam ao mesmo tempo ao ecrã e, mediante uma ligeira alteração no ângulo entre os espelhos, é produzida uma figura de interferência, ou seja, uma série de riscas claras e escuras, correspondentes aos pontos onde as intensidades dos dois feixes se somam e onde se anulam, respectivamente (figura 4). Note-se que uma figura deste tipo seria sempre obtida desde que houvesse alguma diferença, por mais ligeira que fosse, nas distâncias entre os espelhos e o vidro semi-espelhado. Um efeito devido inequivocamente às diferentes velocidades dos dois feixes pode obter-se, no entanto, se se rodar todo o sistema de 90 graus, trocando desse modo os papéis dos feixes A e B. O que se deveria ver então no ecrã seria um deslocamento das riscas claras e escuras, uma vez que, à medida que se roda o sistema, os dois feixes vão interferir de maneira diferente.

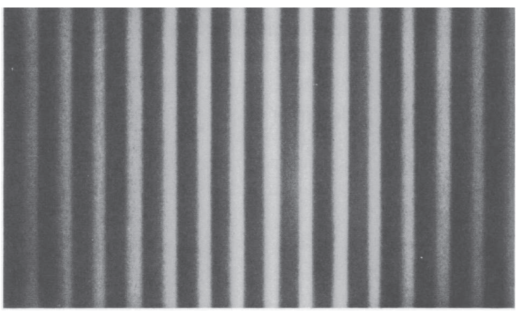

fig. 4

O resultado notável desta experiência é que *não se observou qualquer deslocamento das franjas de interferência.* Mesmo repetindo a experiência em diferentes locais e em diferentes épocas do ano (de maneira que a Terra tivesse uma velocidade diferente relativamente ao éter), o resultado continuou a ser nulo. Outras experiências do mesmo tipo, realizadas mais tarde, confirmaram este resultado. A conclusão que se pode tirar é que não se pode detectar o movimento da Terra através do éter, ou, o que é o mesmo, a velocidade da luz é a mesma independentemente do movimento do observador ou da fonte que a produz. Assim, demonstrou-se que o único efeito possível da existência do éter, a alteração da velocidade da luz com o movimento de um observador, não existe. Isto levou a que se questionasse seriamente a própria existência do éter, por não ter efeitos observáveis e por, realmente, não ser necessário para a explicação de quaisquer factos experimentais.

§ 1.2 PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE DE EINSTEIN: TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Tudo isto levou a que Einstein, em 1905, enunciasse o seu *Princípio da Relatividade* da seguinte maneira:

Todos os sistemas de referência inerciais são equivalentes para a realização de qualquer experiência física.

Dito de outra maneira, as leis da Física (tanto em Mecânica como no Electromagnetismo) são as mesmas em qualquer sistema de inércia. A este postulado Einstein acrescentou um outro:

A velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial de inércia.

Este postulado vai ao encontro do resultado nulo da experiência de Michelson e Morley e tem, além disso, outras consequências importantes, como veremos a seguir.

Consideremos agora um referencial S' que se desloca com velocidade $\vec{v} = v\hat{\imath}$ em relação a um referencial S, tal como está indicado na figura 1, de tal maneira que as origens $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ dos sistemas S e S' coincidam num instante inicial $t = 0$. Vamos considerar também um ponto do espaço num determinado instante t (designamo-lo por *acontecimento*). Se esse ponto tiver as coordenadas (x, y, z) no sistema S, quais serão as suas coordenadas (designemo--las por (x', y', z')) e o instante t' correspondente no sistema S'? Como o movimento do sistema S' se faz segundo o eixo dos xx, as coordenadas y' e z' não são alteradas, isto é, são idênticas a y e z, respectivamente. A coordenada x' vai ser alterada uma vez que, decorrido um tempo t, a origem das coordenadas $\mathcal{O}'$ do sistema S' percorre uma distância vt relativamente à origem $\mathcal{O}$ do sistema S. Por outro lado, supomos que o tempo "flui" da mesma maneira para S e para S'. De acordo com estas ideias podemos escrever

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

A este conjunto de equações para a transformação de coordenadas entre S e S' chama-se *transformações de Galileu*. A ele corresponde uma transformação de velocidades, obtida derivando as coordenadas em ordem ao tempo:

$$
\begin{aligned}
v_{x'} &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v = v_x - v \\
v_{y'} &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} = v_y \\
v_{z'} &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} = v_z
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Como se pode ver, estas equações estão de acordo com a transformação de velocidades que usámos para acharmos a velocidade dos feixes de luz na experiência de Michelson e Morley e que, no fundo, que nos é intuitiva (lembrar o exemplo do carro que ultrapassa outro na estrada). No entanto, como é evidente, estas equações não são compatíveis com o princípio da relatividade de Einstein, uma vez que a velocidade da luz não se mantém constante quando passamos do sistema S para o sistema S' (basta susbstituir v_x por c nas equações (1.4)). Por outro lado, pode também verificar-se que as equações de Maxwell se alteram perante estas transformações. Isto significa que as transformações de Galileu (eqs. (1.3)) não satisfazem o princípio da relatividade de Einstein. Vamos tentar deduzir um conjunto de equações que satisfaçam os postulados de Einstein. Um possível candidato é o conjunto de equações (só para as coordenadas)

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1.5 a}$$

$$y' = y \tag{1.5 b}$$

$$z' = z\,, \tag{1.5 c}$$

onde γ é uma constante, possívelmente dependendo de v. A justificação para a 2ª e 3ª equações é simples: o movimento segundo o eixo dos xx não deve alterar as coordenadas y e z. Relativamente à 1ª equação, podemos argumentar o seguinte:

1. A equação deve ser linear, ou seja, não deve conter potências superiores a 1 em x e em t, uma vez que um acontecimento em S' só deve corresponder a um e um só acontecimento em S. Dito de outa maneira, deve haver uma correspondência unívoca entre os valores de x e t e x' e t'.
2. Se $x = vt$, isto é, se tivermos um objecto em repouso em S' e situado na sua origem, devemos ter $x' = 0$.

Para tentar obter o valor de γ, vamos considerar a equação inversa de (1.5 a), ou seja, escrever a coordenada x' em S' em função de x e t:

$$x = \gamma'(x' + vt')\,. \tag{1.6}$$

Esta equação é obtida usando os mesmos argumentos que foram utilizados para eq. (1.5 a) Note-se que se trocou o sinal a v porque o sistema S se desloca com uma velocidade $-\vec{v} = -v\hat{\imath}$ relativamente a S'. Para saber como é que se relaciona γ' com γ, supunhamos agora que se invertem os eixos dos xx e dos zz dos sistemas S e S' na figura 1. Agora os papéis dos sistemas S e S' ficam trocados, uma vez que agora é o sistema S' que se desloca com uma velocidade com componente $-v$ *relativamente aos novos eixos.* Assim, a transformação (1.6) fica agora

$$x' = \gamma'(x + vt)\,. \tag{1.7}$$

Por outro lado, se trocarmos os sinais de x e x' na equação (1.5 a), temos

$$x' = \gamma(x + vt)\,, \tag{1.8}$$

o que nos permite concluir que

$$\gamma' = \gamma \,. \tag{1.9}$$

Por outro lado, do postulado da constância da luz em qualquer sistema de inércia, sabemos que se $x = ct$, então também se deve ter $x' = ct'$. Substituindo estas expressões em (1.5 a) e (1.6), tendo em conta (1.9), temos

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma t(c - v) \\ ct &= \gamma t'(c + v)\,. \end{aligned}$$

Multiplicando estas duas equações termo a termo temos

$$c^2 tt' = \gamma^2 (c^2 - v^2) tt'$$

o que dá para γ, dividindo ambos os termos da equação por tt',

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{1.10}$$

Tomámos a raiz positiva porque se deverá verificar que, quando $v \to 0$, $x' \to x$. Eliminando x' entre as eqs. (1.5 a) e (1.6) temos

$$\begin{aligned} \frac{x}{\gamma} - vt' &= \gamma(x - vt) \\ vt' &= \gamma(vt - x + \frac{x}{\gamma^2}) \\ t' &= \gamma\Big[t + \frac{x}{v}\Big(\frac{1}{\gamma^2} - 1\Big)\Big] = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})\,. \end{aligned}$$

Esta equação é notável porque nos diz o tempo não “flui” da mesma maneira em dois sistemas de inércia que se desloquem um em relação a outro com uma certa velocidade. Juntando agora todas as equações já obtidas podemos escrever o que se chama a *transformação de*

Lorentz entre coordenadas e instantes de tempo nos sistemas S e S':

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Como se pode ver, estas transformações são bastante diferentes das transformações de Galileu, eqs. (1.3). Aparentemente, estas últimas estarão erradas, dado que não obedecem ao princípio de relatividade de Einstein. No entanto, como já foi sublinhado algumas vezes, elas correspondem, de alguma maneira, às transformações de coordenadas que *intuitivamente*, ou se se quiser, baseando-nos na experiência do dia-a-dia, seriam correctas. Na verdade, se olharmos atentamente para as equações (1.11) verificamos que elas contêm a transformação de Galileu. Na verdade, para velocidades v muito menores do que c (escreve-se $v \ll c$), $\gamma \approx 1$ e $t - vx/c^2 \approx t$ pelo que as eqs. (1.11) se reduzem nesse caso às equações (1.3). Ou seja, a transformação de Galileu continua válida *desde que a velocidade relativa entre os dois sistemas de inércia seja muito pequena comparada com a velocidade da luz.* Ora, no nosso dia-a-dia, é exactamente isso que acontece. Para termos uma ideia do efeito da correcção introduzida pelas equações de Lorentz (1.11) relativamente às (1.3) vamos calcular o valor de γ para o caso do sistema S' se deslocar a uma velocidade igual à de um jacto supersónico com velocidade igual a duas vezes a velocidade do som (cerca de 680 m/s, ou perto de 2500 km/h). Temos

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{680}{3\times 10^8})^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{680}{3 \times 10^8}\Big)^2 = 1 + 2,569 \times 10^{-12} = 1,000000000002569\,,$$

o que difere de um em menos de uma parte em 10^{11}, ou seja uma parte em cem milhares de milhões! No entanto, há fenómenos observáveis em que se tem de aplicar as transformações de Lorentz, como o caso do decaimento de certas partículas ou ainda nos fenómenos electromagnéticos (na verdade, as equações do electromagnetismo apenas se mantêm invariantes — mantêm a mesma forma — se aplicarmos às coordenadas e ao tempo as transformações de Lorentz (1.11)).

§ 1.3 CONSEQUÊNCIAS DAS TRANFORMAÇÕES DE LORENTZ: CONTRACÇÃO DE LORENTZ E DILATAÇÃO DO TEMPO

Vamos examinar agora algumas das consequências das transformações de Lorentz. Imaginemos que no sistema S' se encontra uma régua em repouso, disposta ao longo do eixo dos xx, de comprimento L_0, tal como se indica na figura 5.

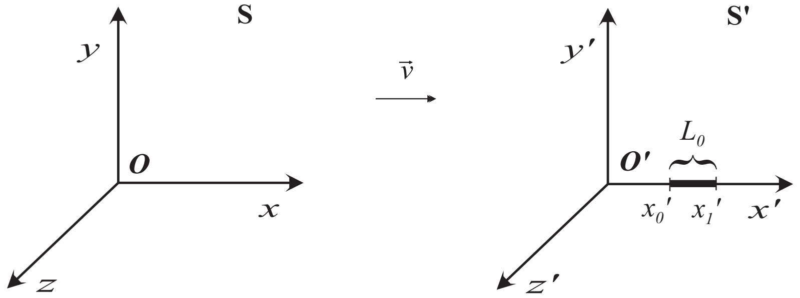

fig. 5

Vamos ver qual é o comprimento desta régua do ponto de vista do observador em S. Uma vez que a régua está em movimento para este observador, ele terá de obter as coordenadas das suas extremidades (para daí calcular o comprimento) *simultaneamente*, ou seja, no mesmo instante. Sejam então x_1' e x_2' as coordenadas das extremidades da régua em S', de tal maneira que $L_0 = x_2' - x_1'$. Da primeira equação de (1.11) temos

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,,$$

onde x_1 e x_2 são as coordenadas das extermidades da régua *medidas pelo observador em* S. Subtraindo as equações termo a termo, temos

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,,$$

ou ainda, designado por $L = x_2 - x_1$ o comprimento da régua medido pelo observador em S,

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}\,. \tag{1.12}$$

Como $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$ então $L < L_0$! Ou seja, do ponto de vista do observador em S, o comprimento da régua é menor do que o que é medido por outro observador em S'! A este fenómeno dá-se o nome de contracção de Lorentz e implica que todos os objectos que se desloquem a uma velocidade v próxima da da luz apareçam a um observador contraídos na direcção do seu movimento. Note-se que os comprimentos medidos em direcções perpendiculares ao movimento (no nosso caso, perdendiculares ao eixo dos xx) se mantêm inalterados, de acordo com a 2ª e 3ª equações de (1.11). Por exemplo, um cubo com 20 cm de aresta que se desloque a uma velocidade $v = 3/5\,c$ parecerá a alguém que o observe um paralelipípedo de secção quadrada de 20 cm de aresta e com comprimento na direcção do movimento igual a $20\sqrt{1-9/25} = 20 \times 4/5 = 16$ cm *.

Outro fenómeno "estranho" que decorre das transformações de Lorentz prende-se com o tempo. Da última equação (1.11) é desde logo evidente que a forma com o tempo flui não é a mesma para dois observadores nos sistemas S e S'. Consideremos então um relógio em repouso em S' num certo ponto do eixo dos xx de coordenada x'. Como se relacionarão os intervalos de tempo medidos por um observador em S' e os medidos por um observador em S nesse relógio? Consideremos para isso a equação inversa da última equação em (1.11), isto é, a equação que dá o tempo medido em S como função da posição e do tempo em S'. Para obter essa equação, basta trocar o sinal de v, uma vez que, *do ponto de vista de* S', o sistema S tem uma velocidade $-v$ segundo o eixo dos xx, ou seja,

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \tag{1.13}$$

Aplicando esta equação ao relógio referido para dois instantes t'_1 e t'_2 medidos em S', temos

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{t'_1 + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t_2 &= \frac{t'_2 + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,, \end{aligned} \tag{1.14}$$

onde t_1 e t_2 são os correspondentes instantes medidos por um observador em S *no mesmo*

* Na verdade, se tal experiência se pudesse fazer, o observador veria um paralelipípedo deformado, devido à diferença de tempos de chegada ao observador da luz vinda dos vários pontos do cubo.

relógio. Subtraindo as equações termo a termo, temos

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > t'_2 - t'_1 \tag{1.15}$$

Ou seja, os intervalos de tempo medidos pelo observador em S são maiores dos que os medidos pelo observador em S'. Isto quer dizer que, *do ponto de vista do observador em* S, o tempo passa mais devagar, ou seja, para este observador, todos os fenómenos *em* S' processam-se a um ritmo mais lento. A lentidão é tanto maior quanto mais a velocidade v do sistema S' se aproximar da velocidade da luz c. A este fenómeno chama-se *dilatação do tempo*. Devemos notar que apenas o observador em S nota esta lentidão, uma vez que para um observador em S' tudo se passa ao ritmo normal.

Há confirmações experimentais deste facto. A mais citada refere-se ao decaimento de uma partícula chamada *muão*, que tem um tempo de vida $\tau = 2 \times 10^{-6}$ segundos. Esta partícula é detectada na Terra ao nível do mar e provém de decaimentos de outras partículas que atingem a alta atmosfera (constituindo o que se chama os raios cósmicos). A velocidade típica dos muões é de cerca $2,994 \times 10^8$ m/s, ou $0,998c$. Ora, a esta velocidade, o muão deveria percorrer uma distância $d = 2,994 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} = 600$ metros. Como os muões são criados a vários quilómetros de altitude, isto significa que nunca poderiam ser detectados à superfície da Terra, o que não é verdade! A solução deste problema está em nos apercebermos que um observador à superfície da Terra mede um tempo de vida do muão diferente de τ pelo facto de este se deslocar com uma velocidade próxima da da luz relativamente a ele. Podemos obter esse tempo de vida, que designamos por τ', aplicando a fórmula (1.15):

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - (0,998c/c)^2}} = 31,7 \times 10^{-6} \text{ s} . \tag{1.16}$$

A distância percorrida seria então de $d' = 2,994 \times 10^8 \times 31,7 \times 10^{-6} = 9500$ metros, o que já explica porque é os muões são detectados à superfície da Terra.

A dilatação do tempo também foi verificada em experiências realizadas em 1971 e 1975 usando um relógio de Césio que foi transportado de avião a jacto à volta do mundo e depois comparado com um relógio idêntico que ficou em terra. Embora a diferença de tempo prevista pela Relatividade Restrita seja muito pequena — a velocidade do avião é muito pequena comparada com a velocidade da luz — foi possível detectar um atraso no relógio que viajou de avião relativamente ao que ficou em terra, dada a altíssima precisão deste tipo de relógios.

§ 1.4 SIMULTANEADADE. DIAGRAMAS ESPAÇO-TEMPO

Outra consequência das transformações de Lorentz é que acontecimentos que são simultâneos num referencial (isto é, ocorrem no mesmo instante) não o são noutro referencial. Consideremos, por exemplo, dois acontecimentos no sistema S que ocorrem no mesmo instante t_0 e em dois pontos do eixo dos xx de coordenadas x_1 e x_2. Aplicando a equação de transformação do tempo, temos

$$
\begin{aligned}
t'_1 &= \frac{t_0 - vx_1/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
t'_2 &= \frac{t_0 - vx_2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

sendo t'_1 e t'_2 os tempos medidos no sistema S' para os dois acontecimentos. Se subtrairmos as equações termo a termo, obtemos

$$
t'_2 - t'_1 = \frac{v(x_1 - x_2)/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \neq 0\,,
$$

Ou seja, os mesmos acontecimentos já não simultâneos em S'! Este facto é consequência do tempo não "fluir" com a mesma rapidez para observadores com movimento relativo. Note-se, no entanto, que por mais velocidade de que um observador esteja animado, o tempo nunca muda de sentido, isto é, a ordem temporal dos acontecimentos nunca se inverte, embora eles se sucedam mais lentamente. Isto significa que um observador numa nave espacial que se desloque a uma velocidade próxima da da luz, ao observar a Terra, nunca verá as pessoas a ficarem cada vez mais novas, as plantas a converterem-se outra vez em sementes, etc.!

Um facto interessante acerca das transformações de Lorentz (1.11) é que a quantidade $c^2t^2 - x^2$ não se altera quando se passa do sistema S para o sistema S'. Na verdade, se calcularmos $c^2t'^2 - x'^2$ usando as equações (1.11) temos

$$
\begin{aligned}
c^2t'^2 - x'^2 =& \gamma^2\Big[\Big(ct - \frac{v}{c}x\Big)^2 - \Big(x - vt\Big)^2\Big] = \\
&= -\gamma^2\Big(x - vt + ct - \frac{v}{c}x\Big)\Big(x - vt - ct + \frac{v}{c}x\Big) \\
&= \gamma^2\Big(c - v\Big)\Big(c + v\Big)\Big(t + \frac{x}{c}\Big)\Big(t - \frac{x}{c}\Big) = c^2t^2 - x^2\,,
\end{aligned}
$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Para uma transformação de Lorentz geral em que as coordenadas y e z também sejam modificadas, pode demonstrar-se que a quantidade

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

se mantém invariante. Este facto permite dar uma interpretação geométrica às transformações de Lorentz, por analogia com o que se passa com uma rotação no espaço. Neste último caso, o que se mantém invariante (constante) é o módulo do vector posição dos pontos que são rodados relativamente à origem do sistema de coordenadas (por exemplo, os pontos de uma esfera centrada na origem das coordenadas). Isto quer dizer que, embora as coordenadas dos vectores rodados sejam diferentes das iniciais, a soma dos seus quadrados $x^2 + y^2 + z^2$ se mantém constante. Podemos imaginar que as transformações de Lorentz operam uma espécie de rotação não só no espaço, mas também no tempo, dado que elas "misturam" as coordenadas x, y, z com os instantes t. A esse espaço conjunto com quatro dimensões formado pelas coordenadas e pelo tempo chama-se *espaço-tempo* e a um ponto desse espaço (definido pelos quatro valores x, y, z, ct) * um *acontecimento*. Por outro lado, a um vector definido neste espaço chama-se um tetravector ou quadrivector. Uma diferença importante em relação aos vectores "normais" do espaço a três dimensões é de como é calculado o seu "módulo" ao quadrado. Por exemplo, para o tetravector posição (com componentes x, y, z, ct), ele é definido como sendo

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

em vez de $c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Desta maneira que podemos afirmar que o "módulo" deste tetravector se mantém constante perante uma tranformação de Lorentz. De acordo com esta regra, define-se a "distância" (intervalo) ao quadrado entre dois acontecimentos como

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 . \tag{1.18}$$

Este intervalo permite-nos estabelecer um critério para saber quando um acontecimento pode causar outro. Na verdade, como veremos na próxima secção, a teoria da Relatividade Restrita tem como consequência que nada se pode deslocar com velocidades superiores à da velocidade da luz no vazio c. Isto significa que não há interacções instantâneas, isto é,

* Notar que o tempo vem multiplicado por c.

qualquer influência que um objecto exerça sobre outro tem um limite superior para a sua velocidade de propagação. Ou seja, qualquer fenómeno (por exemplo a presença de uma carga eléctrica) que se produza num certo ponto do espaço de coordenadas x, y, z no instante t só poderá influenciar o estado de um objecto colocado no ponto de coordenadas $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ no instante $t + \Delta t$ (por exemplo, outra carga) se tivermos

$$\frac{\text{distância entre os dois acontecimentos}}{\text{tempo decorrido entre os dois acontecimentos}} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta t} \leq c\,,$$

ou ainda, elevando ao quadrado ambos os termos da desigualdade e multiplicando por $(\Delta t)^2$,

$$c^2(\Delta t)^2 \geq (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \Leftrightarrow c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \geq 0\,.$$

Concluímos portanto que para dois acontecimentos estarem relacionados é necessário que o intervalo espaço-temporal entre eles, definido por (1.18), seja maior ou igual a zero. Em particular, só será igual a zero se a interacção se propagar à velocidade c (tal seria o caso das duas cargas referidas atrás, desde que fossem colocadas no vazio). Aos três tipos de valores possíveis de $(\Delta s)^2$ dão-se os seguintes nomes:

$$(\Delta s)^2 = \begin{cases} < 0 & \text{intervalo do tipo espaço} \\ = 0 & \text{intervalo do tipo luz} \\ > 0 & \text{intervalo do tipo tempo}\,. \end{cases}$$

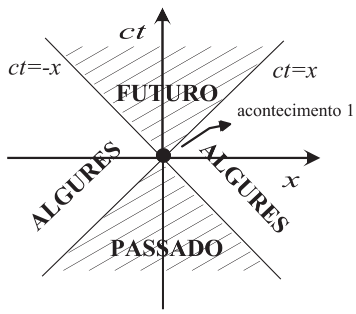

fig. 6

Na figura 6 estão esquematizados estes três casos num diagrama espaço-temporal em que se representa apenas a dimensão espacial x. Se considerarmos o acontecimento 1 na origem dos eixos ($x = 0,\ t = 0$) então os acontecimentos futuros ($t > 0$) que ele poderá influenciar ou os aconteciamentos passados ($t < 0$) que o poderão ter influenciado situam-se na zona sombreada, limitada pelas rectas de equações $ct = x$ e $ct = -x$. Os acontecimentos situados nestas rectas correspondem à propagação da interacção com velocidade c no sentido do eixo positivo e negativo dos xx, respectivamente. Se considerássemos também os eixos dos yy e dos zz as rectas converter-se-iam num cone a quatro dimensões: é o chamado cone de luz. Em resumo, todos os acontecimentos dentro e à superfície do cone de luz podem ser relacionados com o acontecimento 1, correspondendo a $(\Delta s)^2 > 0$ e $(\Delta s)^2 = 0$, respectivamente. Para todos os acontecimentos fora do cone de luz, ao contrário, não se pode estabelecer nenhuma relação de causa e efeito com o acontecimento 1.

§ 1.5 TRANSFORMAÇÃO DE VELOCIDADES

Usando as transformações de Lorentz, vamos ver agora como observadores nos sistemas S e S' que temos vindo a considerar medem a velocidade de um certo objecto. No sistema S', esta será dada pela variação da posição do objecto relativamente ao tempo, *medidos em* S'. Assim, para a componente da velocidade segundo o eixo dos xx temos

$$\begin{aligned} v_{x'} &= \frac{dx'}{dt'} = \\ &= \frac{dt}{dt'}\frac{dx'}{dt} \\ &= \frac{1}{\frac{dt'}{dt}}\frac{d}{dt}\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{v_x - v}{1 - \frac{vv_x}{c^2}}\,, \end{aligned} \tag{1.19}$$

onde $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ e se utilizaram as expressões de x' e t' em (1.11). As expressões das componentes da velocidade segundo os eixos dos yy e zz no sistema S' obtêm-se de uma maneira análoga:

$$v_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dy'}{dt} = \frac{v_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \tag{1.20 a}$$

$$v_{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dz'}{dt} = \frac{v_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{vv_x}{c^2}}\,. \tag{1.20 b}$$

Tal como acontecia com as tranformações de Lorentz, podemos verificar que estas equações se reduzem às eqs. (1.4) deduzidas da transformação de Galileu quando a velocidade v

de S' é muito pequena comparada com c. Podemos também notar que as componentes y e z da velocidade em S' dependem da sua componente x em S.

É interessante verificar que estas equações satisfazem o postulado de Einstein relativo à velocidade da luz. Realmente, se fizermos $v_x = c$ e $v_y = v_z = 0$ obtemos

$$v_{x'} = \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} = c\,\frac{c - v}{c - v} = c\,, \tag{1.21}$$

sendo $v_{y'} = v_{z'} = 0$. Repare-se que este resultado *é independente* de v, isto é, por mais depressa que "persigamos" um raio de luz, este desloca-se em relação a nós sempre com velocidade c!

§ 1.6 "MASSA" RELATIVíSTICA

Usando as relações deduzidas na secção anterior, vamos agora ver o que acontece à massa de um corpo na relatividade restrita. Antes de mais nada, vamos estabelecer o que se entende por massa: por conveniência vamos defini-la como o coeficiente que multiplica a velocidade para dar a quantidade de movimento, ou seja,

$$\vec{p} = m\vec{v}\,. \tag{1.22}$$

Mais tarde vamos analisar brevemente as consequências desta definição. Vamos também supôr que a quantidade de movimento se conserva nas colisões relativistas. Consideremos então a colisão de dois corpos *idênticos*, que designamos por A e B, de tal maneira que A está em repouso no sistema S e B está em repouso no sistema S' (ver figura 7). Tal como temos vindo a considerar, o sistema S' move-se com uma velocidade $\vec{v}$ com a direcção e sentido do eixo positivo dos xx relativamente ao sistema S.

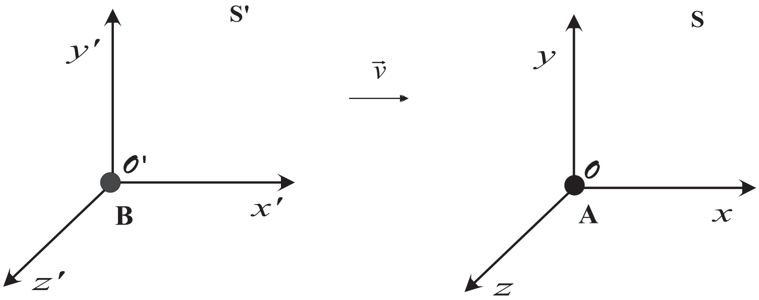

fig. 7

Consideramos também que a colisão não é frontal, mas sim que os corpos chocam "de raspão". Sendo assim, do ponto ponto de vista de um observador em S, o corpo B tem uma velocidade $\vec{v}$ antes do choque, e uma certa velocidade $\vec{v}^B$ depois do choque. Dadas as características do choque, esta velocidade terá também uma certa componente segundo o eixo dos yy, que vamos designar por v_y^B. O corpo A, por sua vez, terá uma certa velocidade $\vec{v}^A$ com uma componente segundo y igual a v_y^A. Por outro lado, um observador em S' vê o corpo A a aproximar-se com velocidade $-\vec{v}$ do corpo B antes do choque. Depois do choque os corpos A e B terão velocidades que designamos por $\vec{v}^{A\prime}$ e $\vec{v}^{B\prime}$, respectivamente, com componentes segundo o eixo dos yy de $v_y^{A\prime}$ e $v_y^{B\prime}$ (ver figura 8).

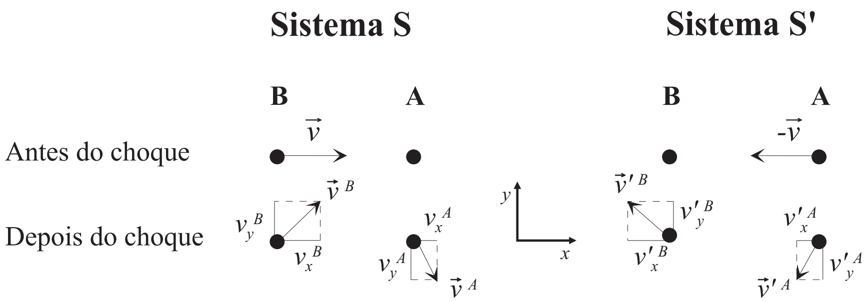

fig. 8

Podemos notar que do ponto de vista dos dois observadores em S e S' a colisão é exactamente a mesma, dado que os corpos são idênticos, sendo a única diferença o facto de as velocidades antes do choque serem simétricas. Isto quer dizer que, aplicando o princípio da relatividade, os resultados da colisão devem ser semelhantes para os dois observadores. Em particular, o corpo que "bate" (B no sistema S e A no sistema S') no corpo que está em repouso deve adquirir a mesma velocidade segundo o eixo dos yy * do ponto de vista dos dois observadores. Por outras palavras, devemos ter

$$|v_y^B| = |v_y^{A\prime}| \,. \tag{1.23}$$

Aplicando agora a conservação da quantidade de movimento segundo o eixo dos yy ao choque visto do sistema S, temos

$$m_A|v_y^A| = m_B|v_y^B| \,, \tag{1.24}$$

* Em módulo, porque se por exemplo o corpo B for "para cima" (componente da velocidade segundo o eixo dos yy positiva) o corpo A deve ir "para baixo", ou seja, deve ter a componente da velocidade segundo o eixo dos yy negativa.

onde consideramos m_A e m_B as massas dos corpos A e B, respectivamente. Por outro lado, podemos relacionar $v_y^{A\prime}$ e v_y^A usando a equação (1.20 a). Desta maneira, obtemos

$$m_A|v_y^A| = m_B|v_y^A|\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\dfrac{vv_x^A}{c^2}} \Leftrightarrow m_B = m_A\frac{1-\dfrac{vv_x^A}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{1.25}$$

Se supusermos agora que a colisão se dá de tal maneira que os corpos mal se toquem, e que portanto o corpo A se mantenha praticamente em repouso depois do choque (sendo então $v_x^A \approx 0$), esta última equação vem

$$m_B = \frac{m_A^{(0)}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{1.26}$$

Como supusemos os corpos idênticos, a massa de A medida em repouso (designada aqui por $m_A^{(0)}$) deve ser igual à massa de B em repouso, pelo que esta equação nos diz que um corpo tem a sua massa modificada pelo facto de deslocar com uma certa velocidade (notar que v é a velocidade do corpo B)!. Este é um resultado notável, que podemos exprimir dizendo que um corpo em movimento com uma certa velocidade de módulo v adquire uma massa m igual a

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{1.27}$$

A massa m_0 designa-se por *massa de repouso*. Uma consequência imediata deste resultado é que a equação de Newton já não se pode escrever indiferentemente como $\vec{F} = m\vec{a}$ ou $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, uma vez que a massa já não é constante. A equação tem agora a seguinte forma

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}\,, \tag{1.28}$$

ou seja, a força já não é igual à massa vezes a aceleração! No entanto, se $v \ll c$, $m \approx m_0$ e $dm/dt \approx 0$ e obtemos a equação de Newton $\vec{F} = m_0\vec{a}$. O facto da força não ser paralela à aceleração, leva alguns autores a evitar chamar “massa” a m, dado que esta já não representa mais o coeficiente que traduz a inércia do corpo, ou seja, a sua resistência a ser acelerado. Apenas m_0 (para baixas velocidades) tem essa propriedade, além de poder ser considerado uma característica intrínseca do corpo, ao contrário de m, que depende da velocidade do corpo. No entanto, neste curso vamos adoptar a definição de massa (1.22), por ser conveniente para perceber a relação que existe entre massa e energia.

Outra consequência da equação (1.27) é que, quando a velocidade do corpo se aproxima de c, m tende para infinito. O mesmo acontece com a sua derivada, pelo que, da equação (1.28), vemos que para acelerar um corpo cuja velocidade é quase igual a c é necessário exercer uma força enorme, tanto maior quanto mais a velocidade se aproxima de c. Isto quer dizer que nunca se pode acelerar um corpo até à velocidade c, ou seja, a velocidade da luz c é um limite superior para a velocidade de qualquer corpo. Como já foi referido atrás, isto inclui as partículas que medeiam as várias interacções entre corpos, o que significa que estas não são interacções instantâneas. Convém precisar que este limite superior refere-se apenas à velocidade da luz *no vazio*. É possível que haja partículas que se desloquem com velocidades superiores à da luz num certo meio com um índice de refracção $n > 1$, onde a velocidade da luz é $c_n = c/n < c$. Quando isso acontece, a partícula pode emitir um tipo de luz que tem uma frente de onda * cónica (ver figura 9). A luz deste tipo chama-se *radiação de Čerenkov*, e pode ser vista nos reactores nucleares de piscina, como o de Sacavém, sob a forma de uma luz azulada.

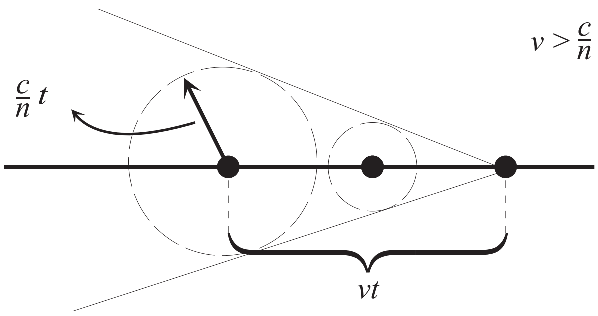

fig. 9

Podemos notar, a propósito, que este é um fenómeno que é comum a qualquer tipo de ondas. São bem conhecidas as ondas formadas a partir da quilha de um barco que se desloca num lago com velocidade superior à velocidade de propagação da ondas na água. As ondas de choque de um avião supersónico que se desloca com uma velocidade superior à do som têm também a mesma origem.

---

* A intersecção das várias ondas esféricas emitidas nos vários pontos do percurso.

§ 1.7 RELAÇÃO ENTRE MASSA E ENERGIA

Na última secção vimos que podemos definir uma massa que depende da velocidade do corpo a que diz respeito. Ora, como sabemos, à velocidade de um corpo está associada uma energia, a energia cinética. Vamos ver que relação se pode estabelecer entre aquela massa e a energia do corpo. Consideremos o trabalho realizado por uma força $\vec{F}$ num deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$. Como sabemos, esse trabalho é igual a uma variação infinitesimal da energia cinética dT, ou seja,

$$dT = \vec{F}.\,d\vec{r}\,.$$

Se considerarmos a variação da energia por unidade tempo (a potência) temos

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}.\,\vec{v}\,. \tag{1.29}$$

Usando a equação de Newton e a eq. (1.22), esta relação pode ser escrita como

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{m}\frac{d\vec{p}}{dt}.\vec{p} = \frac{1}{2m}\frac{dp^2}{dt}\,, \tag{1.30}$$

onde se utilizou a igualdade $dp^2/dt = d\vec{p}^2/dt = 2\vec{p}.\,(d\vec{p}/dt)$. Usando agora a equação (1.27), podemos escrever

$$\begin{aligned} &m^2\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big) = m_0^2 \\ &m^2 - \frac{p^2}{c^2} = m_0^2 \\ &p^2 = (m^2 - m_0^2)c^2\,. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Substituindo em (1.30) ficamos com

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2m}\frac{d(m^2 - m_0^2)c^2}{dt} = \frac{d(mc^2)}{dt}\,. \tag{1.32}$$

Esta relação é muito importante, porque nos diz que a variação da energia cinética é igual à variação de mc^2, o que nos sugere a identificação da energia cinética com mc^2 a menos de uma constante. Na verdade, foi isso mesmo que Einstein fez, ao propôr que um corpo em repouso tivesse uma energia dada por

$$E = m_0 c^2 \,. \tag{1.33}$$

Em movimento, o corpo tem então uma energia que, de acordo com (1.32), deve ser dada por

$$E = T + m_0 c^2 = mc^2 \,. \tag{1.34}$$

O significado destas equações é de que o corpo tem uma energia associada à sua massa, mesmo em repouso, ou seja, um corpo tem um *conteúdo energético* dado pela sua massa vezes a velocidade da luz no vazio ao quadrado. Por exemplo, um grama de matéria tem uma energia igual a $10^{-3} \times 9 \times 10^{16} = 9 \times 10^{13}$ Joules, equivalente à energia que produz uma central térmica de grande dimensão durante cerca de um dia! Note-se que a equivalência entre massa e energia estende-se a qualquer tipo de energia, de tal maneira que a massa de uma partícula composta, formada por duas partículas cuja soma da energia potencial e cinética é negativa, tem uma massa inferior à soma das massas das duas partículas separadamente. Dado o valor de c^2, qualquer pequena diferença de massa pode dar origem a quantidades enormes de energia. É assim que se explica a grande quantidade de energia proveniente da fissão de dois núcleos de urânio e que é usada nas centrais nucleares para a produção de energia eléctrica. É mesmo possível transformar toda a massa de uma partícula em energia nas reacções de aniquilação de partículas e anti-partículas, como é o caso do electrão e positrão. Ao aniquilar-se, dão origem a dois fotões (referir-nos-emos mais tarde a este tipo de partículas) que, no sistema de referência em que o electrão e positrão estão em repouso, têm energia igual a $m_0 c^2$, sendo m_0 a massa de repouso do electrão (que é a mesma do positrão).

Tem interesse verificar que podemos obter a expressão usual da energia cinética para velocidades baixas a partir de (1.34). Na verdade, podemos escrever

$$T = (m - m_0) c^2 = m_0 c^2 \Big(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \Big) \,. \tag{1.35}$$

Se $v \ll c$, então $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1 \approx 1/2(v^2/c^2)$, uma vez se tem, de uma maneira geral

$$(1 \pm x)^\alpha = 1 \pm \alpha x + \ldots \approx 1 \pm \alpha x \qquad \text{se } x \ll 1 \,, \tag{1.36}$$

sendo α um número real. Substituindo em (1.35) temos

$$T = \frac{1}{2} m_0 v^2 \,. \tag{1.37}$$

Para concluir este capítulo vamos deduzir duas relações fundamentais da teoria da relatividade entre a energia E de um corpo e a sua quantidade de movimento $\vec{p}$. A primeira pode obter-se de (1.34) e (1.22) e dá

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \,. \tag{1.38}$$

A segunda pode obter-se de (1.34) e (1.27). Na verdade, temos

$$m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad E^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4 \quad \Leftrightarrow \quad E^2 = E^2 \frac{v^2}{c^2} + m_0^2 c^4 \,.$$

Usando a equação (1.38) podemos escrever finalmente

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \,. \qquad (1.39).$$

Desta equação podemos ver que mesmo uma partícula de massa de repouso nula pode ter energia. Esse é caso do fotão, a que nos referiremos mais tarde.