Escola Quark / Olimpíadas Internacionais de Física - 2008
Electromagnetismo - I

1. a) Se tomarem para eixo dos zz o eixo do anel, recorrendo à lei de Coulomb e ao princípio de sobreposição deverão obter:

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z$$

b) O campo tem um máximo para $z = R/\sqrt{2}$.

2. a) Usando a expressão do potencial eléctrico criado por uma carga pontual, $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$, e o princípio de sobreposição determina-se o potencial num ponto do eixo à distância z do centro do anel

$$V(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

Como

$$E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} \,,$$

facilmente se confirma o resultado já obtido na questão anterior.

b) Quando $z \gg R$, obtém-se

$$V \simeq \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{1}{z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{z}$$

e

$$\vec{E} \simeq \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{z}{z^3} \hat{e}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{z^2} \hat{e}_z \,,$$

ou seja, o anel é equivalente a uma carga pontual $Q = 2\pi R\lambda$ colocada no centro do anel (as dimensões do anel tornam-se irrelevantes!)

Quando $z \ll R$, obtém-se para a expressão do potencial

$$V \simeq \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right)$$

Esta expressão tende para um valor constante no centro do anel ($z = 0$)

Nestas condições, o campo varia linearmente com z, como já se viu na questão **1c**), e anula-se no centro do anel.

Nota: quando $x \ll 1$, é útil a expressão $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + ...$

3. O campo pode obter-se sobrepondo os campos devidos a vários "anéis"de carga. Considerando o eixo dos zz com origem no centro da esfera e apontando para dentro da superfície semi-esférica de carga, obtém-se $\vec{E} = -\sigma/4\varepsilon_0\,\hat{e}_z$. Notem que cada "anel"tem raio $r = a\sin\theta$ e carga $\mathrm{d}q = 2\pi\sigma a^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.

4. a) Quando se aplica a diferença de potencial V entre os dois condutores, estabelece-se um campo eléctrico radial na região entre os condutores:

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,\hat{e}_r$$

A densidade linear de carga λ pode determinar-se, a partir da relação entre campo eléctrico e potencial eléctrico:

$$V(r=a) - V(r=b) = V = \int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Temos, então

$$\vec{E}(r) = \frac{V}{\ln(b/a)}\frac{1}{r}\,\hat{e}_r\,, \quad a < r < b$$

b) A área elementar sobre a superfície cilíndrica de raio b é $\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$; nesta área existe a carga $\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}A$, sendo $\sigma = \frac{Q}{2\pi bL} = \frac{\lambda}{2\pi b}$

A força exercida sobre a carga $\mathrm{d}q$ é, em módulo, $\mathrm{d}F = \mathrm{d}q\,E(r=b)$. Usando as expressões obtidas para $\mathrm{d}q$ e para $\vec{E}$ obtém-se

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} = \varepsilon_0\left(\frac{V}{\ln(b/a)}\frac{1}{b}\right)^2$$

A força por unidade de área é

$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}A} = -\varepsilon_0 E^2\,\hat{e}_r$$

Esta força é atractiva e representa *apenas* a força (por unidade de área) que o condutor de raio a exerce sobre o condutor de raio b. Facilmente se conclui que a força total por unidade de comprimento é nula.

c) Como o campo electrostático é conservativo,

$$E_{\text{cin.}}(a) + E_{\text{pot.}}(a) = E_{\text{cin.}}(b) + E_{\text{pot.}}(b)$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}m_e v_a^2 - e\,V = 0 \longrightarrow v_a = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$

5. a) A densidade de carga positiva na esfera de raio R é $\rho = \frac{3e}{4\pi R^3}$. Assim, o campo criado por esta distribuição de carga pode obter-se usando a lei de Gauss:

$$\vec{E}_+(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r}{R^3}\,\hat{e}_r \quad r < R$$

$$\vec{E}_+(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\hat{e}_r \quad r \geq R$$

A força exercida sobre um electrão é $\vec{F} = -e\vec{E}$ e, portanto, o electrão está em equilíbrio no centro da esfera, onde o campo é nulo.

Ligeiramente afastado desta posição, fica sujeito a uma força do tipo $\vec{F} = -Kr\hat{e}_r$ $(r \ll R)$ e $K = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ e passará a oscilar com frequência

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3}}$$

b) Obtém-se $R \simeq 102 \times 10^{-12}\text{m} = 102$ pm (picometro).

6. Neste problema, como de resto em outras situações análogas, podemos considerar que o condutor longo de raio a, em cujo interior não flui corrente, produz o mesmo efeito que seria obtido com duas correntes iguais em sentido contrário.

Tomando para eixo dos zz o eixo do condutor de raio R, a densidade de corrente existente é $\vec{J} = \frac{I}{\pi R^2 - \pi a^2}\,\hat{e}_z$.

Esta distribuição de corrente deve então criar o mesmo campo que será criado por uma corrente de densidade $\vec{J'} = \frac{I'}{\pi R^2}\,\hat{e}_z$, preenchendo completamente o cilindro de raio R, conjuntamente com outra corrente de densidade $\vec{J'} = -\frac{I'}{\pi R^2}\,\hat{e}_z$, preenchendo completamente o cilindro de raio a, desde que $J' = J$.

O campo $\vec{B}$ criado por uma corrente rectilínea longa, de densidade uniforme J, em pontos interiores do condutor é (lei de Ampère): $\vec{B} = \frac{\mu_0 J r}{2}\,\hat{e}_\phi$.

Assim, nos pontos do interior do condutor de raio a, o campo criado pelo cilindro de raio R será:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0\, J'}{2}\,(-y\hat{e}_x + x\hat{e}_y) = -\frac{\mu_0\, J'}{2}\,(y\hat{e}_x - x\hat{e}_y)$$

e o campo criado pelo cilindro de raio a será:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0\, J'}{2}\,[(y-d)\hat{e}_x - x\hat{e}_y]\,,$$

admitindo que o eixo deste cilindro intersecta a secção no ponto de coordenadas $x = 0$, $y = d$.

O campo resultante, no interior do cilindro de raio a, será

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{R^2 - a^2} \hat{e}_x$$

7. O texto seguinte responde a uma questão que me foi posta anteriormente, relativamente à aplicabilidade da lei de Ampère neste problema. *Se em vez de uma placa metálica de largura d tivessem um plano "infinito"de corrente (d $\gg$ a), poderiam de facto resolver a questão usando a lei de Ampère. Podem esboçar as linhas de campo e confirmar que o contorno de Ampère adequado seria um rectângulo (ou um quadrado!) num plano perpendicular ao plano de corrente.*

Todavia, no problema proposto, parece-me que o caminho mais adequado será considerar a placa metálica como um conjunto de "fios infinitos"paralelos entre si, cada um dos quais cria um campo $\mathrm{d}\vec{B}$, e aplicar o princípio de sobreposição.

Suponham que escolhem os eixos dos zz e dos yy sobre a placa, o primeiro no sentido da corrente e o segundo paralelo ao segmento de dimensão d; o eixo dos xx é perpendicular à placa e contém o ponto P (as coordenadas de P são $(a, 0, 0)$).

Cada "fio"cria em P, o campo de grandeza $|\mathrm{d}\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{r}$, tal que $\mathrm{d}I = \kappa\,\mathrm{d}y$ com $\kappa = \frac{I}{d}$ e $r^2 = a^2 + y^2$.

É útil trabalhar com as componentes do campo:

$$\mathrm{d}B_y = \mathrm{d}B\cos\theta \quad \text{e} \quad \mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B\sin\theta$$

Usando as relações algébricas adequadas, penso que deverão obter:

$$B_y = \frac{\mu_0\kappa}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1)$$

e

$$B_x = \frac{\mu_0\kappa}{2\pi} \ln\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$

Se $\theta_2 = -\theta_1$, teremos $B_x = 0$ e $B_y = \frac{\mu_0 I}{\pi d}\theta$ com $\theta = \arctan(\frac{d}{2a})$

Se $\theta_2 \to \pi/2$ e $\theta_1 \to -\pi/2$, então$B_x = 0$ e $B_y = \frac{\mu_0 I}{2d}$, que é o campo criado por um plano infinito de corrente.

Verifiquem se concordam e se obtêm os mesmos resultados; no caso de haver dúvidas, voltamos a discutir a questão.

8. a) As correntes localizam-se no plano xz, pelo que o campo por elas criado é $\vec{B} = 0$, para $y < 0$ e para $y > d$; na região entre os planos, $0 < y < d$, tem-se $\vec{B} = \mu_0 k \hat{e}_x$.

b) Os iões descrevem uma trajectória circular de raio $d/4$ no plano yz. O valor de k pedido é $k = \frac{4mv_0}{\mu_0 q d}$.

c) A força que um plano exerce sobre o outro pode calcular-se usando a expressão da força de Laplace:

$$\mathrm{d}\vec{F} = I \mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Consideremos, por exemplo a força que o plano em $y = 0$ exerce sobre o plano em $y = d$, começando por identificar as grandezas a substituir na expressão anterior:

$$I = k\,\mathrm{d}x\,, \quad \mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}z\hat{e}_z\,, \quad \vec{B} = \mu_0 \frac{k}{2}\hat{e}_x$$

Obtém-se

$$\mathrm{d}\vec{F} = \frac{\mu_0 k^2}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\hat{e}_z \times \hat{e}_x = \frac{\mu_0 k^2}{2}\,\mathrm{d}A\,\hat{e}_y\,,$$

ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}A} = \frac{\mu_0 k^2}{2}\,\hat{e}_y\,.$$

A força é perpendicular ao plano de corrente e é repulsiva (correntes em sentidos opostos nos dois planos).