Escola Quark / Olimpíadas Internacionais de Física - 2008
Electromagnetismo - II

1. A intensidade da corrente induzida na espira é:

a) $I(t) = \frac{\omega\mu_0 N \ell_1{}^2 I_0}{LR}\,\sin(\omega t)\,.$

b) $I(t) = \frac{\omega\mu_0 N \pi a^2 I_0}{LR}\,\sin(\omega t)\,.$

2.) a) O campo magnético no interior de uma bobina muito longa pode determinar-se usando a lei de Ampère: admitindo que o campo no exterior é nulo, obtém-se, no interior da bobina considerada, $\vec{B} = \mu_0 \mathrm{n} I \hat{e}_z$, sendo n=N/$\ell$.

A intensidade de corrente I determina-se a partir de

$$V(t) = V_0\cos(\omega t) = L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \implies I(t) = \frac{V_0}{\omega L}\,\sin(\omega t)$$

Assim, o campo magnético no interior da bobina é dado por $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t)\,\hat{e}_z$, com $B_0 = \frac{\mu_0 \mathrm{n} V_0}{\omega L}$.

b) A força electromotriz (f.e.m.) induzida na bobina pequena é dada por

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{N}'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{B}\cdot\hat{n}S) = -\mathrm{N}'\omega B_0 \pi a'^2\,\cos(\omega t)$$

A amplitude da f.e.m. induzida é $\varepsilon_0 = \mathrm{N}'\omega B_0\pi a'^2$, de onde se conclui, atendendo a que N′=N/4 e a′=a/4, $B_0 = \frac{64\,\varepsilon_0}{\omega \mathrm{N}\pi a^2}$.

Medindo a amplitude da f.e.m. induzida, determina-se B_0 e pode comparar-se este valor com o valor teórico calculado em a).

c) Mesmo tratando-se de uma bobina muito longa, a expressão $\vec{B} = B_0\sin(\omega t)\,\hat{e}_z$ é aproximada, pois o campo é menos intenso nas extremidades da bobina: é cada vez menor o número de linhas de campo que atravessam a secção da bobina pequena e essas linhas são inclinadas em relação ao eixo dos zz; portanto a amplitude da f.e.m. que se mede deve ser menor.

3. Neste problema a ideia consiste em considerar que a variação com o tempo da energia cinética de rotação do anel é dissipada por efeito de Joule, devido às correntes induzidas no anel pelo facto de este se encontrar a rodar no campo magnético da Terra.

Escolhendo o eixo dos zz na direcção do diâmetro vertical em torno do qual o anel roda, a perpendicular ao plano do anel é $\hat{n} = \cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y$, com $\phi = \omega t$ (em face da *nota* no fim do enunciado, considera-se que a velocidade de rotação do anel diminui muito lentamente).

O fluxo do campo magnético através da superfície limitada pelo anel é

$\Phi_{\mathrm{mag.}} = B \cos 64^o \, \sin(\omega t) \, \pi a^2$

e a potência média dissipada no anel é:

$$P_{\mathrm{med.}} = \frac{(\omega B \cos 64^o \, \pi a^2)^2}{2R}$$

Por outro lado, a energia cinética de rotação é dada por $K_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\mathcal{I}\omega^2$, sendo o momento de inércia em relação ao eixo de rotação que estamos a considerar $\mathcal{I} = \frac{1}{2}\, ma^2$.

No seguimento do que escrevi no início, teremos, então:

$$\frac{(\omega B \cos 64^o \, \pi a^2)^2}{2R} = -\frac{1}{2} m a^2 \omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

O instante t' tal que $\omega(t') = \omega/2$ obtém-se a partir da equação anterior e é $t' = 1,102352 \times 10^6\,\mathrm{s}$, ou seja, cerca de 12 dias e 18 horas!

4. A alínea a) desta questão já foi resolvida: é uma aplicação simples da lei de Ampère, que conduz a

$$\vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi r}\, \hat{e}_\phi$$

Considerámos que o eixo dos zz tem a direcção e sentido da corrente "infinita".

Na alínea b) temos de novo uma aplicação da lei de Faraday:

A força electromotriz induzida no conjunto das N espiras quadradas é:

$$\varepsilon(t) = -\frac{\omega N \mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) \cos(\omega t)$$

Como

$$\varepsilon_{\mathrm{ef}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = \frac{\omega N \mu_0 I_0\, a}{2\pi\sqrt{2}} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) \,,$$

obtém-se

$$I_{\mathrm{ef}} = \frac{2\pi\varepsilon_{\mathrm{ef}}}{\omega N \mu_0 a \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)} \,.$$

5. Quando o anel está a cair vai variando o fluxo magnético através da área por ele delimitada. A força electromotriz induzida no anel é

$$\varepsilon = \alpha B_0 \pi r_0^2 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,.$$

Como a resistência do anel é nula, $\varepsilon = \mathcal{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$; obtém-se assim a expressão da corrente induzida no anel:

$$I(t) \;=\; \frac{\alpha\, B_0\, \pi\, r_0^2}{\mathcal{L}}\, z(t)$$

Esta corrente fica sob a acção do campo magnético dado e, portanto, sujeita a forças que podemos calcular, usando a expressão da força de Laplace: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B}$.

A resultante destas forças é $\vec{F} = -kz\,\hat{e}_z$, com $k = \frac{2\alpha\,\beta B_0^2\,(\pi\, r_0^2)^2}{\mathcal{L}}$.

Além desta força, que aponta no sentido de B_z (note-se que o anel move-se a partir de $z = 0$ para a região de valores negativos de z), actua sobre o anel o peso, dado por $\vec{P} = -mg\,\hat{e}_z$

O anel terá um movimento oscilatório entre $z = 0$ e $z_{\text{max.}} = -2mg/k$, ou seja, $z(t) = \frac{g}{\omega^2}\,[\cos(\omega t) - 1]$, com $\omega = \sqrt{k/m}$.

Assim, a expressão da corrente no anel, explicitamente em função do tempo, será:

$$I(t) \;=\; \frac{\alpha\, B_0\, \pi\, r_0^2\, g}{\mathcal{L}\, \omega^2}\; [\cos(\omega t) - 1]$$

Pode verificar-se que $I_{\text{max.}} \simeq 39$ A.