Escola Quark / Olimpíadas Internacionais de Física - 2013
Electromagnetismo - II

1. A intensidade da corrente induzida na espira é:

a) $I(t) = \frac{\omega\mu_0 N\ell_1^2 I_0}{LR}\,\sin(\omega t)\,.$

b) $I(t) = \frac{\omega\mu_0 N\pi a^2 I_0}{LR}\,\sin(\omega t)\,.$

2.) a) O campo magnético no interior de uma bobina muito longa pode determinar-se usando a lei de Ampère: admitindo que o campo no exterior é nulo, obtém-se, no interior da bobina considerada, $\vec{B} = \mu_0 \mathrm{n} I \hat{e}_z$, sendo n=N/$\ell$.

A intensidade de corrente I determina-se a partir de

$$V(t) = V_0\cos(\omega t) = L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \implies I(t) = \frac{V_0}{\omega L}\,\sin(\omega t)$$

Assim, o campo magnético no interior da bobina é dado por $\vec{B} = B_0\sin(\omega t)\,\hat{e}_z$, com $B_0 = \frac{\mu_0 \mathrm{n} V_0}{\omega L}$.

b) A força electromotriz (f.e.m.) induzida na bobina pequena é dada por

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{N}'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{B}\cdot\hat{n}S) = -\mathrm{N}'\omega B_0\pi a'^{\,2}\,\cos(\omega t)$$

A amplitude da f.e.m. induzida é $\varepsilon_0 = \mathrm{N}'\,\omega B_0\pi a'^2$, de onde se conclui, atendendo a que N$'$=N/4 e a$'$=a/4, $B_0 = \frac{64\,\varepsilon_0}{\omega \mathrm{N}\pi a^2}$.

Medindo a f.e.m. induzida, determina-se B_0 e pode comparar-se este valor com o valor teórico calculado em a).

c) Mesmo tratando-se de uma bobina muito longa, a expressão $\vec{B} = B_0\sin(\omega t)\,\hat{e}_z$ é aproximada, pois o campo é menos intenso nas extremidades da bobina: é cada vez menor o número de linhas de campo que atravessam a secção da bobina pequena e essas linhas são inclinadas em relação ao eixo dos zz; portanto a amplitude da f.e.m. que se mede deve ser menor.

3. Neste problema a ideia consiste em considerar que a variação com o tempo da energia cinética de rotação do anel é dissipada por efeito de Joule, devido às correntes induzidas no anel pelo facto de este se encontrar a rodar no campo magnético da Terra.

Escolhendo o eixo dos zz na direcção do diâmetro vertical em torno do qual o anel roda, a perpendicular ao plano do anel é $\hat{n} = \cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y$, com $\phi = \omega t$ (em face da *nota* no fim do enunciado, considera-se que a velocidade de rotação do anel diminui muito lentamente).

O fluxo do campo magnético através da superfície limitada pelo anel é

$\Phi_{\mathrm{mag.}} = B\cos 64^{\mathrm{o}}\,\sin(\omega t)\,\pi a^2$

e a potência média dissipada no anel é:

$$P_{\mathrm{med.}} = \frac{(\omega B\cos 64^{\mathrm{o}}\,\pi a^2)^2}{2R}$$

Por outro lado, a energia cinética de rotação é dada por $K_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\mathcal{I}\omega^2$, sendo o momento de inércia em relação ao eixo de rotação que estamos a considerar $\mathcal{I} = \frac{1}{2}\,ma^2$.

No seguimento do que se referiu no início, teremos, então:

$$\frac{(\omega B \cos 64^{\mathrm{o}}\, \pi a^2)^2}{2R} = -\frac{1}{2} m a^2 \omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

O instante t' tal que $\omega(t') = \omega/2$ obtém-se a partir da equação anterior e é $t' = 1,102352 \times 10^6$ s, ou seja, cerca de 12 dias e 18 horas!

4. Num circuito oscilador ideal, a carga do condensador e a corrente no circuito oscilam com amplitude constante. De acordo com as condições iniciais, podemos considerar $q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$ e $I(t) = \omega Q_0 \sin(\omega t)$, com $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Inicialmente a energia está apenas armazenada no condensador e é igual a $U = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$. No instante t, a energia da bobina é dada por:

$$U_L(t) = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{1}{2} L (\omega Q_0 \sin(\omega t))^2$$

e a do condensador por:

$$U_C(t) = \frac{1}{2C} q^2(t) = \frac{1}{2C} (Q_0 \cos(\omega t))^2$$

Verifica-se que as expressões anteriores assumem o mesmo valor nos instantes $t = (2n+1)\,\frac{\pi}{4}\,\sqrt{LC}$ indicados no enunciado e que esse valor é metade da energia armazenada no condensador no instante $t = 0$.

5. A alínea a) desta questão já foi resolvida: é uma aplicação simples da lei de Ampère, que conduz a

$$\vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi r}\, \hat{e}_\phi$$

Considerámos que o eixo dos zz tem a direcção e sentido da corrente "infinita".

Na alínea b) temos de novo uma aplicação da lei de Faraday:

A força electromotriz induzida no conjunto das N espiras quadradas é:

$$\varepsilon(t) = -\frac{\omega N \mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) \cos(\omega t)$$

Como

$$\varepsilon_{\mathrm{ef}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = \frac{\omega N \mu_0 I_0\, a}{2\pi\sqrt{2}} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right),$$

obtém-se

$$I_{\mathrm{ef}} = \frac{2\pi \varepsilon_{\mathrm{ef}}}{\omega N \mu_0 a \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)}.$$

6. a) A força eletromotriz induzida no circuito é $\varepsilon = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln(\frac{y_2}{y_1})$.

b) A barra fica sujeita a uma força magnética que trava o seu movimento; para manter a velocidade constante tem que ser exercida uma força com a direção e sentido da velocidade e dada pela expressão:

$$F = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2 \left[\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right]^2 \frac{v}{R}$$

c) O trabalho realizado pela força exterior quando a barra se desloca $\mathrm{d}x$ é $\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x$, que se pode escrever $\mathrm{d}W = F\,v\,\mathrm{d}t$; então, a potência é $P = Fv$, sendo F dada pela expressão obtida na alínea anterior.

7. a) O módulo do campo magnético criado na origem, por cada um dos fios, é igual e dado pela expressão

$$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,; \qquad r = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}\,.$$

O campo resultante, $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, tem a direcção do eixo dos yy e a sua grandeza é

$$B = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\theta\,; \quad \cos\theta = \frac{d/2}{r}$$

Atendendo à expressão da corrente $I(t) = I_0\sin(\omega t)$ e à direcção do campo, podemos escrever

$$\vec{B}(t) = B_0\sin(\omega t)\,\hat{e}_y \quad \text{com} \quad B_0 = \frac{2\mu_0 I_0 d}{\pi(4h^2 + d^2)}$$

b) O campo eléctrico induzido, no disco (moeda) de raio a colocado na origem, obtém-se usando a lei de Faraday: a força electromotriz induzida, ε_i, relaciona-se com o campo eléctrico induzido, $\vec{E}(r,t)$. Nos pontos à distância r do centro do disco:

$$\varepsilon_i(r,t) = \oint \vec{E}(r,t)\cdot\hat{t}\,\mathrm{d}\ell = E(r,t)\times 2\pi r\,.$$

Como

$$\varepsilon_i(r,t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\omega B_0 \pi r^2\cos(\omega t)\,,$$

obtém-se

$$\vec{E}(r,t) = -\frac{\omega B_0 r}{2}\cos(\omega t)\,\hat{e}_\phi\,.$$

c) Podemos calcular a potência dissipada no disco, considerando-o como um conjunto de "fios circulares concêntricos". Um fio genérico tem comprimento $\ell = 2\pi r$, área da secção $\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}r$ e resistividade $\rho = 1/\sigma$. Como $\mathrm{d}I = J\,\mathrm{d}A = \sigma\,E\,\mathrm{d}A$, a intensidade de corrente no fio é

$$\mathrm{d}I(r,t) = -\frac{\sigma\omega B_0 r}{2}\,b\,\mathrm{d}r\,\cos(\omega t)$$

e a potência dissipada em cada "fio"

$$\mathrm{d}P(r,t) = \frac{\pi\sigma b}{2}(\omega B_0)^2\,\cos^2(\omega t)\,.$$

Integrando para todo o disco, obtemos

$$P(t) = \frac{\pi\sigma b}{2}(\omega B_0)^2\,\cos^2(\omega t)\,\frac{a^4}{4}\,,$$

que representa a potência instantânea dissipada no disco. Para obtermos a potência média, calculamos

$$P_{\mathrm{med.}} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\pi\sigma b a^4(\omega B_0)^2\,.$$

Também se podia ter calculado a potência fornecida ao disco. Para cada "anel"percorrido pela corrente $\mathrm{d}I(r,t)$, a potência fornecida é $\mathrm{d}P(r,t) = \varepsilon_i(r,t)\,\mathrm{d}I(r,t)$. Integrando para todo o disco e tomando o valor médio obtém-se, como é de esperar, o mesmo resultado.

8. a) Quando a barra se move, a força electromotriz induzida no circuito $\varepsilon_i(t)$ e a correspondente corrente induzida $I(t)$ são dadas por:

$$\varepsilon_i(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B\ell v(t)\,, \quad \text{e} \quad I(t) = -\frac{B\ell v(t)}{R}\,,$$

respectivamente. A força que o campo magnético exerce sobre a barra obtém-se calculando a força de Laplace

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{F}| = I\ell B = \frac{(B\ell)^2}{R}\,v(t)$$

Esta força opõe-se ao movimento, pelo que a equação de movimento é:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{(B\ell)^2}{R}\,v(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{v(t)} = -\frac{(B\ell)^2}{mR}\,\mathrm{d}t$$

Integrando a equação anterior entre o instante $t = 0$ (em que a velocidade é v_0) e o instante t (em que a velocidade é $v(t)$) e relacionando as funções logaritmo e exponencial obtém-se o resultado referido no enunciado.

b) A aceleração da barra é $a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, pelo que a barra pára no instante t' tal que

$$-v_0 = \int_0^{t'} a(t)\mathrm{d}t = v_0 \int_0^{t'} \left(-\frac{1}{\tau}\right)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-t'/\tau} - 1 = -1\,.$$

A distância percorrida pela barra até ao instante t' é

$$x(t') = \int_0^{t'} v(t)\mathrm{d}t = -v_0\,\tau \int_0^{t'} \left(-\frac{1}{\tau}\right)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad x(t') = v_0\,\tau\,.$$

c) A energia eléctrica dissipada no circuito obtém-se calculando $\int_0^{t'} RI^2(t)\,\mathrm{d}t$. Verifica-se que a energia cinética inicial da barra se dissipa por efeito Joule.

9. Tomando para eixo dos zz o eixo comum dos solenóides, tem-se:

a) $\vec{B}(t) = 3\mu_0 nI(t)\,\hat{e}_z = 3\mu_0 nkt\,\hat{e}_z\,, \quad$ para $\quad 0 \leq r < R\,;$
$\vec{B}(t) = \mu_0 nI(t)\,\hat{e}_z = \mu_0 nkt\,\hat{e}_z\,, \quad$ para $\quad R < r < 2R\,;$
$\vec{B} = 0\,, \quad$ para $\quad r > 2R\,.$

b) O campo eléctrico induzido na região entre os dois solenóides é dado por:

$$\vec{E}(r) = -\frac{\mu_0 nk}{2r}(2R^2 + r^2)\,\hat{e}_\phi\,,$$

sendo r a distância ao eixo dos solenóides.

c) A força elétrica sobre a carga coloca-a em movimento na direção do campo $\vec{E}$. A força magnética é responsável pelo movimento circular, pois desempenha o papel de força centrípeta. A força elétrica é uma força tangencial. Nestas condições, verifica-se que o módulo da velocidade varia linearmente com o tempo e o raio da trajetória é $r = \sqrt{2}R$.

10. a) Quando o disco metálico cai com velocidade $\vec{v}$, a força magnética $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ faz mover os electrões da esquerda para a direita, "criando-se" assim uma distribuição de carga positiva na face esquerda e uma distribuição simétrica na face direita. O campo eléctrico que se estabelece entre as faces é aproximadamente uniforme e dado por $E = vB$. Podemos, por outro lado, relacionar este campo com a referida distribuição de cargas (equivalente a um condensador plano):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\pi R^2 \, \varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad Q = \varepsilon_0 \pi R^2 v B \, .$$

b) Como se verificou, a carga depende da velocidade; se a velocidade variar com o tempo, a carga também varia e existe corrente de uma face para a outra:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 \pi R^2 B \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad I = \varepsilon_0 \pi R^2 B a \, ,$$

sendo I a intensidade de corrente e a a aceleração do disco.

O disco move-se sob a acção do seu peso e da força de Laplace exercida pelo campo magnético sobre a corrente I:

$$\vec{P} + \vec{F}_{\text{Lap.}} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad mg - IBd = ma \, ,$$

de onde se obtém $a = g/(1 + \varepsilon_0 \pi R^2 B^2 d/m)$.

c) Considerando o efeito do campo magnético como uma pequena perturbação, podemos escrever a expressão obtida para a aceleração como

$$a \simeq g \left(1 - \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 B^2 d}{m} \right)$$

A razão $\pi R^2 d/m$ é o inverso da massa volúmica do disco; podemos considerar que o disco é de alumínio, $\rho_{\mathrm{A}\ell} = 2,7 \times 10^3 \, \mathrm{kg/m^3}$. Fazendo $B = 0,1 \, \mathrm{T}$ e $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \, \mathrm{F/m}$, obtém-se $(g - a)/g \simeq 3,27 \times 10^{-16}$, que é um efeito na prática indetectável.

11. a) O fluxo magnético através do circuito é

$$\Phi = \vec{B} \cdot \hat{\mathrm{n}} \, A(t) = B \, \cos\theta \, \ell \, x(t) \, .$$

A corrente induzida no circuito é $I = -B \, \ell \, v \, \cos\theta / R$ e flui no sentido horário.

b) A força de Laplace sobre a barra móvel é paralela à base do plano, aponta da direita para a esquerda e tem de módulo $F = I\ell B$. A barra adquire velocidade constante (velocidade terminal) quando $P \sin\theta = F \cos\theta$, ou seja:

$$mg \sin\theta = (B\ell)^2 \, \frac{v_{\mathrm{t}} \cos\theta}{R} \, cos\theta \quad \Longrightarrow \quad v_{\mathrm{t}} = \frac{mgR \sin\theta}{(B\ell \cos\theta)^2} \, .$$

c) Potência dissipada na resistência

$$P_{\text{diss.}} = RI^2 = \frac{v_{\mathrm{t}}^2}{R} \, (B\ell \cos\theta)^2$$

Variação da energia mecânica da barra:

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta E_{\text{pot}} = -mgh = -mgd \sin\theta$$

A diminuição de energia mecânica por unidade de tempo corresponde ao trabalho realizado pelo peso para manter a velocidade constante e é dissipada no circuito por efeito Joule. De facto:

$$\frac{\Delta E_{\text{mec}}}{\Delta t} = -mgv_{\text{t}}\sin\theta$$

e

$$P_{\text{diss.}} = \frac{v_{\text{t}}}{R}\,\frac{mgR\sin\theta}{(B\ell\cos\theta)^2}\,(B\ell\cos\theta)^2 = mgv_{\text{t}}\sin\theta\,.$$

12. a) Quando o disco roda no sentido anti-horário, a força magnética sobre os electrões, é dirigida radialmente da periferia para o centro, $\vec{F}_{\text{m}} = -e\,\omega\,r\,B\,\hat{e}_{\text{r}}$. O movimento de electrões para o centro é equivalente ao movimento de cargas positivas para a periferia. Em regime estacionário $\vec{F}_{\text{e}} = -\vec{F}_{\text{m}} = e\,\omega\,r\,B\,\hat{e}_{\text{r}}$ e o campo eléctrico induzido é $\vec{E} = -\omega\,r\,B\,\hat{e}_{\text{r}}$. A diferença de potencial entre um ponto da periferia do disco (P) e um ponto do centro (C) é

$$V_P - V_C = V = \frac{1}{2}\omega B a^2$$

Como o fluxo magnético através da área do disco é $\phi = B\,\pi a^2$ e o período de rotação é $T = \frac{2\pi}{\omega}$, pode escrever-se $V = \phi/T$.

b) Existindo uma resistência R a ligar a periferia ao centro, a corrente que a percorre é $I = V/R$ e a potência dissipada por efeito Joule é

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 B^2 a^4}{4R}$$

A energia cinética de rotação do disco é dada por

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2}\mathcal{I}\omega^2 = \frac{1}{4}\,ma^2\omega^2$$

A taxa de diminuição da energia cinética do disco corresponde à potência dissipada na resistência:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{c}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega^2 B^2 a^4}{4R} = -\frac{B^2 a^2}{mR}\,E_{\text{c}} = -\frac{E_{\text{c}}}{\tau}\,,$$

com $\tau = \frac{mR}{B^2 a^2}$.

c) A equação

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{c}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{E_{\text{c}}}{\tau}$$

pode escrever-se na forma

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{c}}}{E_{\text{c}}} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau}\,,$$

de onde se obtém a expressão

$$E_{\text{c}}(t) = E_{\text{c}}(0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

que mostra que para $t = \tau$ a energia do cilindro deveria ser ainda cerca de $1/3$ do seu valor inicial.

Calculando τ com os valores numéricos dados, obtém-se $\tau = 25000\,\text{s} \simeq 6{,}9$ horas. Se o cilindro parou após cerca de 10 minutos, deverão existir outros mecanismos de dissipação de energia.