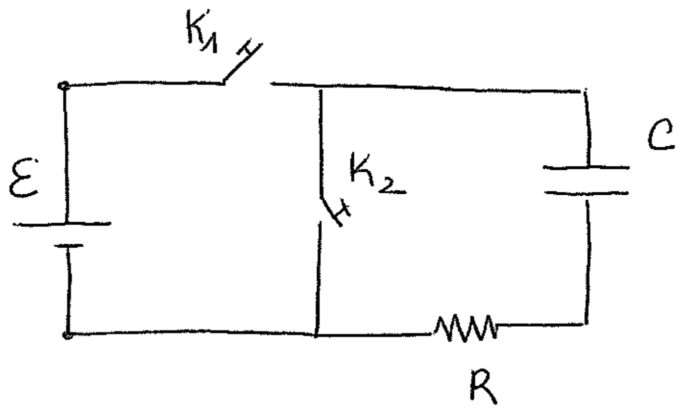
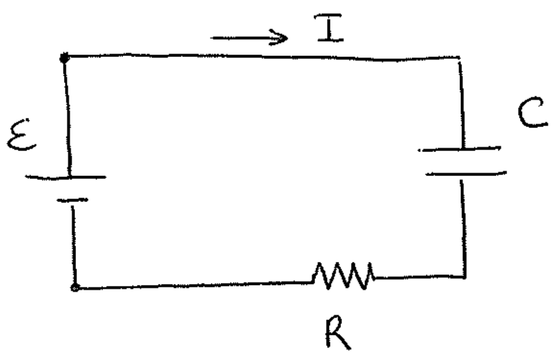
Análise de um circuito RC



(a) O condensador C está inicialmente descarregado. Fecha-se o interruptor K_1 (e mantém-se K_2 aberto)



$$\begin{cases} \mathcal{E} = \dfrac{q}{C} + RI \\ I = \dfrac{dq}{dt} \end{cases}$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = \frac{C\mathcal{E} - q}{RC}$$

$$-\frac{dq}{C\mathcal{E} - q} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int_{q(t=0)}^{q(t)} \frac{-dq}{C\mathcal{E}-q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln(C\mathcal{E}-q) - \ln C\mathcal{E} = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{C\mathcal{E}-q}{C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{C\mathcal{E}-q(t)}{C\mathcal{E}} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$C\mathcal{E} - q(t) = C\mathcal{E}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\boxed{q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

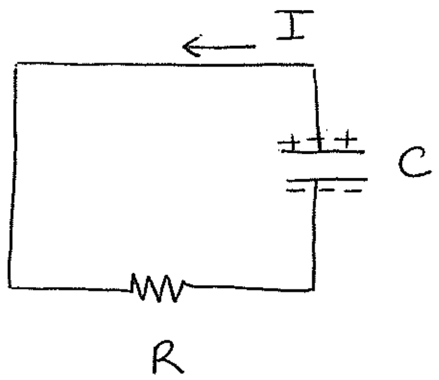
$t=0 \longrightarrow q(0) = 0$

$t \to \infty \longrightarrow q(t) \to C\mathcal{E}$

$t = RC \longrightarrow q(t) = C\mathcal{E}\left(1-\frac{1}{e}\right) \approx \frac{2}{3}C\mathcal{E}$

tempo característico do circuito (constante temporal)

(b) Fecha-se o interruptor K_2 e abre-se K_1



$$\frac{q}{C} - RI = 0$$

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

sentido do movimento das cargas positivas (sentido convencional)

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Solução da equação

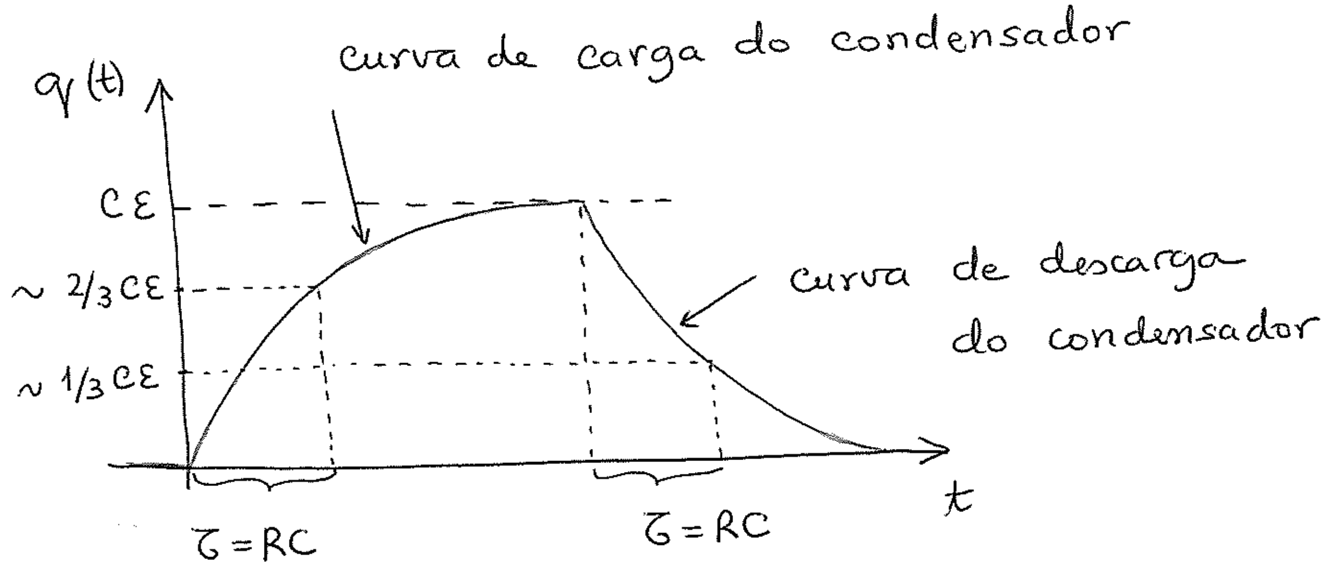
$$\boxed{q(t) = C\mathcal{E}\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$t = 0 \longrightarrow q(0) = C\mathcal{E}$

$t \to \infty \longrightarrow q(t) \to 0$

$t = RC \longrightarrow q(t) = \dfrac{C\mathcal{E}}{e} \approx \dfrac{1}{3} C\mathcal{E}$

Graficamente



Intensidade da corrente no circuito

(a) durante a carga do condensador

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$t = 0 \longrightarrow I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$t \to \infty \longrightarrow I(\infty) \to 0$$

(b) durante a descarga do condensador

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$t = 0 \longrightarrow I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$t \to \infty \longrightarrow I(\infty) \to 0$$

Considerações de energia

Em (a) o condensador armazena energia

$$\mathcal{U}_c = \int d\mathcal{U}_c = \int_0^{C\mathcal{E}} dq \, V_c(t) =$$

$$= \int_0^{C\mathcal{E}} \frac{q(t)}{C} \, dq = \frac{1}{C} \left. \frac{q^2(t)}{2} \right|_0^{C\mathcal{E}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{C^2 \mathcal{E}^2}{2C} = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$

Como $Q = C\mathcal{E}$, podemos escrever

$$\mathcal{U}_c = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q \mathcal{E}$$

Em equilíbrio $\mathcal{E} \equiv V$

d.d.p. entre as armaduras do condensador

$$\mathcal{U}_c = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q V$$

Energia fornecida pela bateria durante a carga do condensador

$$\mathcal{U}_B = \int d\mathcal{U}_B = \int_0^{\infty} \mathcal{E}\, I(t)\, dt =$$

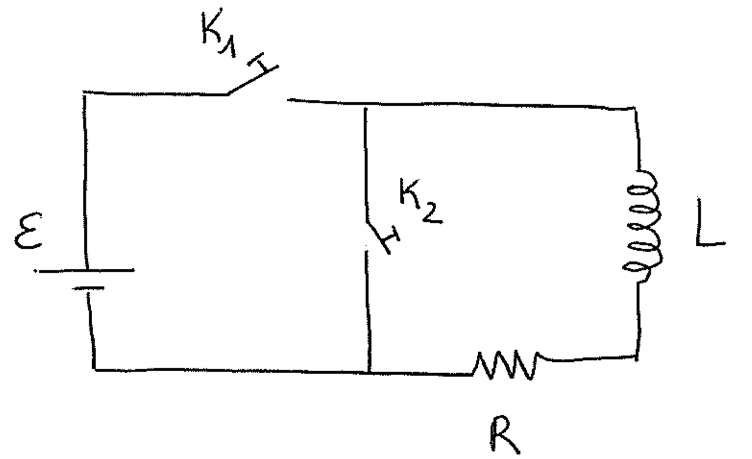
$$= \mathcal{E} \times \frac{\mathcal{E}}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{RC}}\, dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\,(-RC) \int_0^{\infty} -\frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, dt$$

$$= -\mathcal{E}^2 C \quad e^{-\frac{t}{RC}} \Big|_0^{\infty} = C\mathcal{E}^2$$

Metade desta energia fica armazenada no condensador e a outra metade é dissipada por efeito Joule na resistência, como se pode verificar calculando

$$\mathcal{U}_R = \int_0^{\infty} R\, I^2(t)\, dt \longrightarrow \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2$$

Análise de um circuito RL

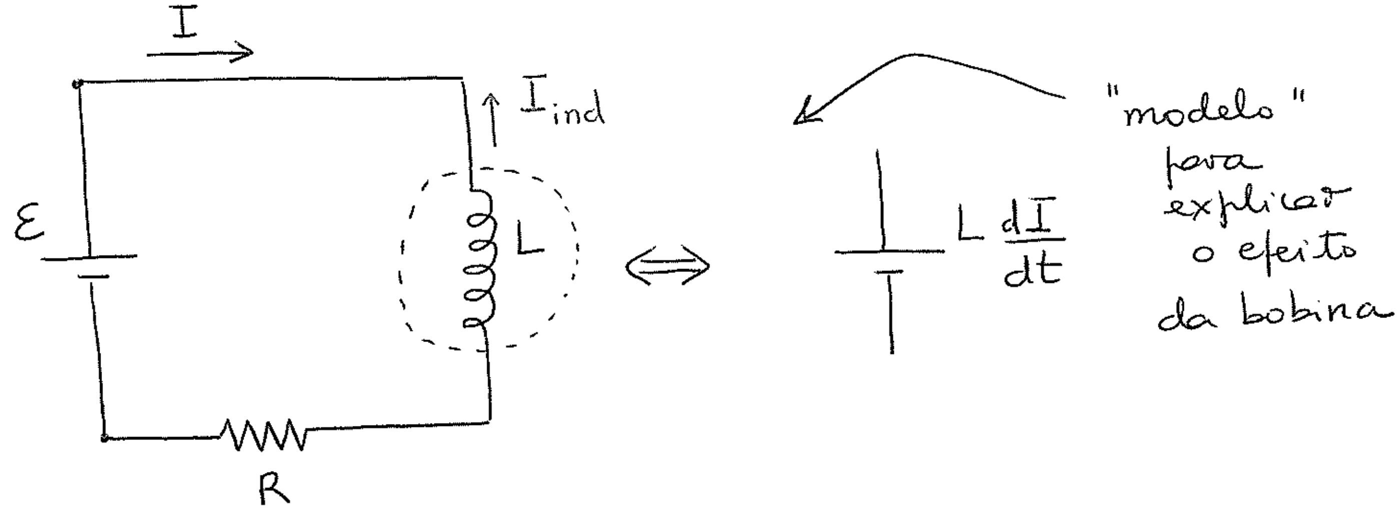


(a) Começamos por fechar o interruptor K_1 (mantendo K_2 aberto). Se o circuito não incluísse uma bobina a corrente no circuito atingiria rapidamente o valor constante $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ (regime estacionário).

Estando presente a bobina, surge uma f. e. m. auto-induzida (e, consequentemente uma corrente induzida) que, de acordo com a lei de Lenz, se opõe à causa que lhe deu origem

$$\mathcal{E}_{ind} = -L \underbrace{\frac{dI}{dt}}_{>0} \Rightarrow \mathcal{E}_{ind} < 0$$

$$|\mathcal{E}_{ind}| = L \frac{dI}{dt}$$



A equação do circuito é

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}$$

(formalmente análoga à que se escreveu para a carga do condensador)

a que se pode dar a forma

$$\frac{-R\,dI}{\mathcal{E} - RI} = -\frac{R}{L}\,dt$$

↓ integrando entre $I(0)=0$ e $I(t)$

↓ integrando entre $t=0$ e t

obtém-se

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$t = 0 \longrightarrow I(0) = 0$

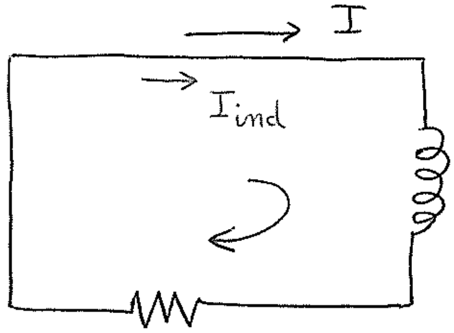
$t \to \infty \longrightarrow I(\infty) \to \dfrac{\mathcal{E}}{R}$

$\tau = t = \dfrac{L}{R} \longrightarrow I(\tau) \approx \dfrac{2}{3}\dfrac{\mathcal{E}}{R}$

$\tau = t = \dfrac{L}{R}$

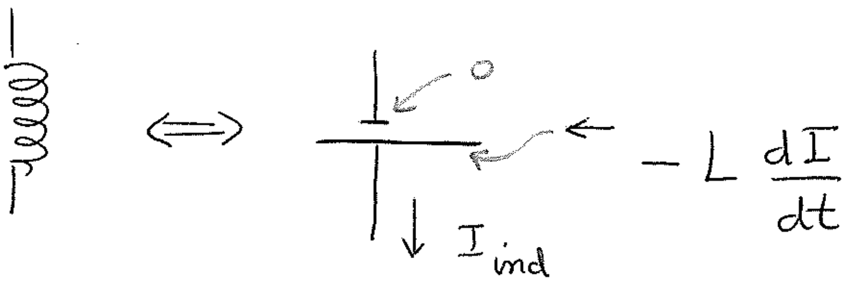
↑ constante temporal do circuito

(b) Fecha-se o interruptor K_2 e abre-se de seguida o interruptor K_1.



A corrente vai de novo variar no circuito, desta vez a diminuir.

$$\mathcal{E}_{ind} = \underbrace{-L\frac{dI}{dt}}_{>0} \text{, porque } \frac{dI}{dt} < 0$$

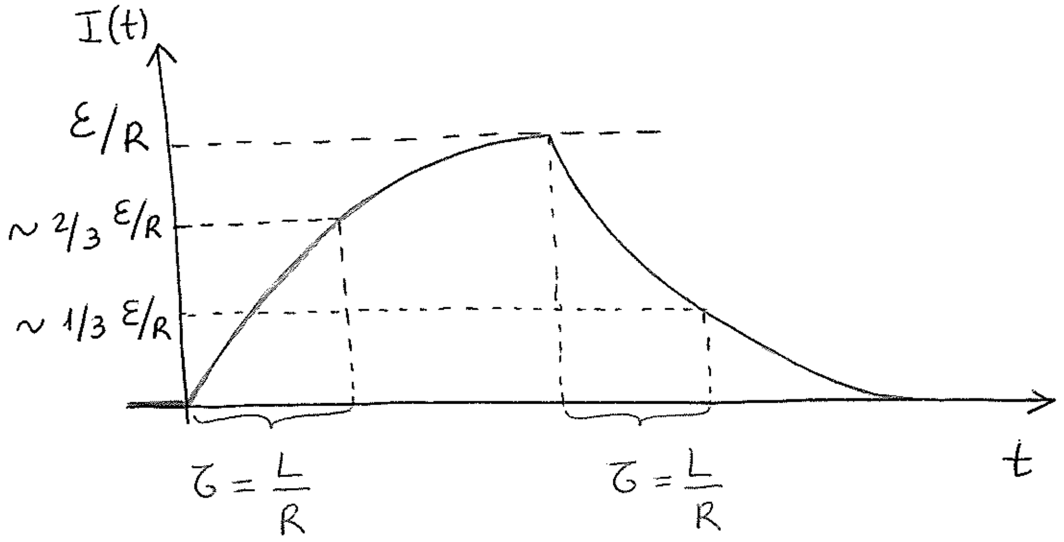


$$RI - \left(-L\frac{dI}{dt}\right) = 0$$

$$\boxed{L\frac{dI}{dt} + RI = 0}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

Gráfico de $I(t)$ no circuito RL



Quanto menor for o valor da indutância L, mais rapidamente a corrente atinge o valor estacionário $I = \mathcal{E}/R$.

Energia armazenada na bobina quando se atinge o regime estacionário:
multiplicando por I a equação do circuito ficamos com

$$L I \frac{dI}{dt} + R I^2 = \mathcal{E} I$$

energia fornecida por unidade de tempo ao circuito

energia dissipada na resistência por unidade de tempo (potência)

energia armazenada na bobina por unidade de tempo

$$\frac{dU_L}{dt} = L I \frac{dI}{dt} \Rightarrow U_L = \int_0^{I_{final}} L I(t)\, dI = \frac{1}{2} L I^2$$

$$= \frac{1}{2} L \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2$$

Esta energia é dissipada por efeito Joule na resistência R quando se fecha o interruptor K_2.