Escola Quark / Olimpíadas Internacionais de Física - 2010
Electromagnetismo - I

1. a) Se tomarem para eixo dos zz o eixo do anel, recorrendo à lei de Coulomb e ao princípio de sobreposição deverão obter:

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{e}_z$$

b) O campo tem um máximo para $z = R/\sqrt{2}$.

2. a) Usando a expressão do potencial eléctrico criado por uma carga pontual, $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$, e o princípio de sobreposição determina-se o potencial num ponto do eixo à distância z do centro do anel

$$V(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

Como

$$E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\,,$$

facilmente se confirma o resultado já obtido na questão anterior.

b) Quando $z \gg R$, obtém-se

$$V \simeq \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z}$$

e

$$\vec{E} \simeq \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{z^3}\,\hat{e}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2}\,\hat{e}_z\,,$$

ou seja, o anel é equivalente a uma carga pontual $Q = 2\pi R\,\lambda$ colocada no centro do anel (as dimensões do anel tornam-se irrelevantes!).

Quando $z \ll R$, obtém-se para a expressão do potencial

$$V \simeq \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{z^2}{2R^2}\right)\,.$$

Esta expressão tende para um valor constante no centro do anel ($z = 0$).

Nestas condições, o campo varia linearmente com z, como já se viu na questão 1-c), e anula-se no centro do anel.

Nota: quando $x \ll 1$, é útil a expressão $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots$

3. O campo pode obter-se sobrepondo os campos devidos a vários "anéis" de carga. Considerando o eixo dos zz com origem no centro da esfera e apontando para dentro da superfície semi-esférica de carga, obtém-se $\vec{E} = -\sigma/4\varepsilon_0\,\hat{e}_z$. Note-se que cada "anel" tem raio $r = a\sin\theta$ e carga $\mathrm{d}q = 2\pi\sigma a^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.

4. a) O campo eléctrico de uma esfera isoladora de raio R, carregada com densidade uniforme de carga ρ, distribuída no seu volume pode determinar-se aplicando a lei de Gauss. Obtém-se:

$$\text{para} \quad r < R \longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}\, \hat{e}_r\,; \quad \text{para} \quad r \geq R \longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\frac{R^3}{r^2}\,\hat{e}_r$$

Com os dados do problema, as expressões anteriores escrevem-se:

$$\text{para} \quad r < R \longrightarrow \vec{E}(r) = 2,3 \times 10^5\, r\, \hat{e}_r\,; \quad \text{para} \quad r \geq R \longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{2,3 \times 10^2}{r^2}\,\hat{e}_r$$

b) Num ponto exterior à esfera, o potencial eléctrico tem a expressão $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r}$, com $Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$. Deste modo, $V(r = 20\,\text{cm}) \simeq 1130\,\text{V}$.

c) Como o campo electrostático é conservativo, $\Delta E_{\text{cin}} = -\Delta U_{\text{p}}$, de onde resulta

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\left[qV(r = R) - qV(r = \infty)\right] \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = q\,\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}\,.$$

Usando os valores numéricos, obtém-se $v_0 = 3\,\text{m/s}$.

5. a) A densidade de carga positiva na esfera de raio R é $\rho = \frac{3e}{4\pi R^3}$. Assim, o campo criado por esta distribuição de carga pode obter-se usando a lei de Gauss:

$$\vec{E}_+(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r}{R^3}\,\hat{e}_r \quad r < R$$

$$\vec{E}_+(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\hat{e}_r \quad r \geq R$$

A força exercida sobre um electrão é $\vec{F} = -e\vec{E}$ e, portanto, o electrão está em equilíbrio no centro da esfera, onde o campo é nulo.

Ligeiramente afastado desta posição, fica sujeito a uma força do tipo $\vec{F} = -Kr\hat{e}_r$ $(r \ll R)$ e $K = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ e passará a oscilar com frequência

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3}}$$

b) Obtém-se $R \simeq 102 \times 10^{-12}\text{m} = 102$ pm (picometro).

6. a) O campo eléctrico criado por um cilindro muito longo pode calcular-se aplicando a lei de Gauss. As superfícies gaussianas adequadas são superfícies cilíndricas, coaxiais com o cilindro de carga, de comprimento arbitrário ℓ, de raio $r < R$ para calcular o campo no interior da distribuição de carga, e $r > R$ para o campo em pontos exteriores. Obtém-se:

$$\text{para} \quad r < R \longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho\, r}{2\varepsilon_0}\, \hat{e}_r\,; \quad \text{para} \quad r \geq R \longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\,\frac{R^2}{r}\,\hat{e}_r$$

b) Podemos considerar que a cavidade cilíndrica de raio $R/2$, em cujo interior não existe carga, é equivalente a duas distribuições de carga com a mesma densidade mas de sinal contrário $(+\rho)$ e $(-\rho)$.

O campo $\vec{E}_1$, criado pelo cilindro maior num ponto no seu interior é, como vimos, $\vec{E}_1(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\,\hat{e}_r$, que também se pode escrever $\vec{E}_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\,(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y)$.

O campo $\vec{E}_2$, criado pelo cilindro menor num ponto no seu interior, é dado por $\vec{E}_2 = \frac{-\rho}{2\varepsilon_0}\left[(x - \frac{R}{2})\hat{e}_x + y\hat{e}_y)\right]$.

Nos pontos do interior da cavidade, o campo eléctrico é $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, de onde resulta um campo constante dado por $\vec{E} = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}\,\hat{e}_x$.

7. a) Na região entre as placas carregadas, os iões descrevem uma trajectória parabólica, sob a acção da força eléctrica $\vec{F} = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{e}_y$. O movimento é uniforme na direcção do eixo dos xx e uniformemente acelerado na direcção do eixo dos yy:

$$x = v_0\, t\,; \qquad y = \frac{1}{2}\,\frac{q\sigma}{\varepsilon_0 m} t^2$$

Tendo em conta a geometria do sistema, obtém-se

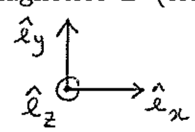
$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 m v_0^2 d}{q\ell^2}\,.$$

b) A força exercida pelo campo magnético terá de ser simétrica da força eléctrica:

$$qE = qv_0 B \implies \vec{B} = \frac{\sigma}{v_0\varepsilon_0}\,\hat{e}_z\,.$$

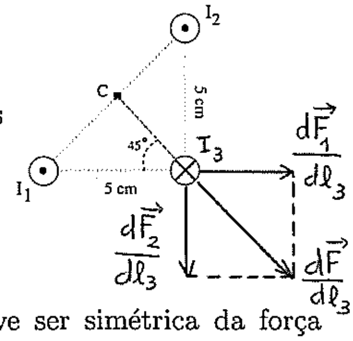
c) A força entre as placas é atractiva e perpendicular às placas. O módulo da força por unidade de área é $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} = \frac{\varepsilon_0}{2}\,(\frac{\sigma}{\varepsilon_0})^2$.

8. a) Neste problema aplica-se a lei de Laplace $\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B}$. Esta expressão permite calcular a força sobre cada elemento $\mathrm{d}\vec{\ell}$ de um circuito percorrido pela corrente I, quando este está colocado numa região onde existe um campo magnético $\vec{B}$ (criado por outras correntes, por um magnete, etc.).



A força que o fio 1 exerce sobre o fio 3 é $\mathrm{d}\vec{F}_1 = I_3\,\mathrm{d}\vec{\ell}_3 \times \vec{B}_1$. Usando os valores dados obtém-se

$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}_1}{\mathrm{d}\ell_3} = 3{,}2 \times 10^{-5}\,\hat{e}_x \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{F}_2}{\mathrm{d}\ell_3} = -3{,}2 \times 10^{-5}\,\hat{e}_y\,.$$



A força, por unidade de comprimento exercida pelos dois fios sobre I_3 é

$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}\ell_3} = 3{,}2 \times 10^{-5}\,(\hat{e}_x - \hat{e}_y)\,\mathrm{N/m}\,.$$

b) A força exercida pela corrente a colocar no ponto C deve ser simétrica da força calculada em a). Para que isso se verifique a corrente (I_4) deve ter o mesmo sentido de I_3 e intensidade $I_4 = 2\,\mathrm{A}$.

9. a) Escolhendo para eixo dos zz o eixo comum dos dois solenóides e considerando a corrente no sentido do versor $\hat{e}_\phi$, obtêm-se os seguintes resultados

$\vec{B} = 2\mu_0 nI\,\hat{e}_z\,,\quad \text{para } r < a\,;$

$\vec{B} = \mu_0 nI\,\hat{e}_z\,,\quad \text{para } a < r < b\,;$

$\vec{B} = 0\,,\quad \text{para } r > b\,.$

b) A corrente mínima (correspondente a uma trajectória tangencial ao solenóide interior) é dada pela expressão $I = \frac{mv}{\mu_0 nqa}$.

10. a) Neste problema, aplicamos novamente a expressão da força de Laplace (ver problema 8).

A força que o campo exerce sobre os lados da bobina em $x = 0$ e em $x = 10\,\text{cm}$ é nula ($\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B} = 0$). Sobre o lado em $y = 0$ a força é $\vec{F} = -1,2\,\hat{e}_z$ N e sobre o lado em $y = 10\,\text{cm}$ é $\vec{F}' = 1,2\,\hat{e}_z$ N.

b) As forças a que a bobina está sujeita formam um binário, cujo momento é $\vec{\mathcal{M}} = 0,12\,\hat{e}_x$ N m. Sob a acção deste sistema de forças a bobina roda, de modo que o seu plano fique perpendicular ao campo $\vec{B}$. O momento que actua sobre a bobina pode obter-se, calculando os momentos das forças aplicadas ou calculando $\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \times \vec{B}$, onde $\vec{m} = NIA\,\hat{e}_z$ designa o momento magnético da bobina.

11. a) Os iões "selecionados" têm velocidade $v = E/B_1 = 7,5 \times 10^5$ m/s.

b) A separação é dada por $d = 2r_2 - 2r_1 \simeq 7,8\,\text{cm}$.

12. Em qualquer instante a partícula fica sujeita à força de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, sendo $\vec{v} = v_x\,\hat{e}_x + v_y\,\hat{e}_y + v_z\,\hat{e}_z$, $\vec{E} = E\,\hat{e}_z$ e $\vec{B} = B\,\hat{e}_z$. Decompondo a força nas suas componentes escalares:

$$F_x = qv_yB\,;\quad F_y = -qv_xB\,;\quad F_z = qE\,,$$

e aplicando a lei fundamental da dinâmica, obtêm-se as seguintes equações:

$$q\,v_y\,B = m\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,;\quad -q\,v_x\,B = m\,\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,;\quad q\,E = m\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,.$$

Integrando as equações anteriores, obtém-se

$$v_x(t) = v_0\,\cos(\omega t)\,;\quad v_y(t) = -v_0\,\sin(\omega t)\,;\quad v_z(t) = \frac{qE}{m}t\,.$$

A partícula descreve uma trajectória em hélice com passo crescente: trata-se da composição de um movimento circular no plano xy com um movimento uniformemente acelerado na direcção do eixo dos zz.

Se a velocidade inicial da partícula for segundo o eixo dos zz, o movimento é rectilíneo e uniformemente acelerado na direcção deste eixo, sendo a velocidade dada por $\vec{v}(t) = (v_0 + \frac{qE}{m}t)\hat{e}_z$.

13. a) Escolhendo como superfície gausssiana uma esfera concêntrica com a Terra e raio apenas infinitesimalmente superior ao raio da Terra, $(R = R_T + \delta \simeq R_T)$, obtém-se $Q_0 = -6,83 \times 10^5$ C; a densidade superficial de carga correspondente será $\sigma_0 = -1,33 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2} = -1,33\,\mathrm{nC/m^2}$.

b) A altitude de 100 m representa um número pequeno quando comparado com o valor do raio da Terra; localmente, e até esta altitude, as linhas do campo eléctrico são paralelas entre si. Podemos, pois, escolher como superfície gaussiana um cilindro de altura $h = 100\,\mathrm{m}$ e bases de área arbitrária A, uma junto à superfície da Terra, onde o campo eléctrico vale 150 V/m e a outra à altitude de 100 m, onde o campo é 100 V/m.

Aplicando a lei de Gauss, obtém-se, para o valor médio da densidade volumétrica de carga, $\rho = 4,425 \times 10^{-12}\,\mathrm{C/m^3}$, o que corresponde a cerca de 3×10^7 iões monopositivos por metro cúbico.

c) A densidade volumétrica de corrente em direcção à superfície da Terra é

$$\vec{J} = \rho_+ \vec{v} = n_+ e \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{J} = 1,44 \times 10^{-14}\,\vec{E}\,.$$

Seja ΔA um pequeno elemento de área sobre a superfície da Terra. A carga existente em ΔA varia com o tempo, $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}t}\,\Delta A$, devido à corrente de iões positivos atraídos para a Terra:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I = \int_{\Delta A} \vec{J} \cdot \hat{\mathrm{n}}\,\mathrm{d}A \quad \Longrightarrow \quad J\Delta A = \frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}t}\,\Delta A\,.$$

Usando estas relações e tendo em conta que junto à superfície da Terra $E_0 = -\sigma_0/\varepsilon_0$, obtém-se

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}t} = -1,63 \times 10^{-3}\,\sigma_0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_0(t) = \sigma_0(0)\,\mathrm{e}^{-1,63\times 10^{-3}t}$$

O tempo necessário para reduzir a carga a 10^{-3} do seu valor inicial será da ordem de 1 hora 10 minutos e 37 segundos.

14. a) Usando a expressão de conservação da energia para os electrões sujeitos ao campo $\vec{E}$, obtém-se:

$$\frac{1}{2} m v_b^2 - eV = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_b = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

b) O vector posicional do electrão, em qualquer ponto da sua trajectória, é $\vec{r} = r\,\hat{\mathrm{e}}_r$ (tanto r como $\hat{\mathrm{e}}_r$ variam). O vector velocidade é $\vec{v} = v_r\,\hat{\mathrm{e}}_r + v_\phi\,\hat{\mathrm{e}}_\phi$. A força eléctrica sobre o electrão é sempre radial, $\vec{F}_e = -e\vec{E}\,\hat{\mathrm{e}}_r$. A força magnética é $\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B} = e\,B\,(v_r\,\hat{\mathrm{e}}_\phi - v_\phi\,\hat{\mathrm{e}}_r)$. O momento das forças aplicadas é igual a taxa de variação temporal do momento angular do electrão:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F} = e\,r\,v_r\,B\,\hat{\mathrm{e}}_z \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = e\,r\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,B \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \frac{1}{2}\,e\,r^2\,B\right) = 0\,.$$

Do resultado obtido, conclui-se que a expressão entre parêntesis é uma constante do movimento.

c) Usando o facto de a expressão indicada em b) ser constante, podemos escrever:

$$\text{em} \quad r = a \quad \longrightarrow \quad 0 - \frac{1}{2}\, e\, a^2\, B_c$$

$$\text{em} \quad r = b \quad \longrightarrow \quad m\, v_b\, b - \frac{1}{2}\, e\, b^2\, B_c$$

Igualando as expressões e recordando que $v_b = \sqrt{2eV/m}$, obtém-se

$$B_c = \frac{2b}{b^2 - a^2}\sqrt{\frac{2mV}{e}}\,.$$

15. A distribuição de correntes dada é equivalente a dois cilindros percorridos por correntes de igual intensidade I', fluindo em sentidos opostos. Neste "modelo" a densidade de corrente tem que corresponder à densidade de corrente que efectivamente existe no problema dado, isto é:

$$|\vec{J}'| = |\vec{J}| \quad \Longrightarrow \quad \frac{I'}{\pi(\frac{D}{2})^2} = \frac{I}{(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8})D^2} \quad \Longrightarrow \quad I' = \frac{6\pi}{2\pi + 3\sqrt{3}}\, I$$

Usando a lei de Ampère, calculamos o campo criado por um cilindro percorrido pela corrente I', num ponto do seu interior, $r < D/2$: $\vec{B} = \frac{2\mu_0 I' r}{\pi D^2}\,\hat{e}_\phi$. É útil decompor o campo $\vec{B}$ nas suas componentes num referencial xyz: o eixo dos zz tem a direcção do eixo do cilindro (a corrente tem a direcção e sentido deste eixo) e os eixos dos xx e dos yy estão no plano que contém a secção do cilindro.

$$B_x = -B \sin\phi \quad \Longrightarrow \quad B_x = -\frac{2\mu_0 I' y}{\pi D^2}\,,$$

$$B_y = B \cos\phi \quad \Longrightarrow \quad B_y = \frac{2\mu_0 I' x}{\pi D^2}\,.$$

No esquema dado no problema, o "cilindro" C_+ cria um campo de componentes:

$$B_x = -\frac{2\mu_0 I' y}{\pi D^2} \quad \text{e} \quad B_y = \frac{2\mu_0 I'}{\pi D^2}\left(x + \frac{D}{4}\right)$$

e o "cilindro" C_- cria um campo de componentes:

$$B_x = \frac{2\mu_0 I' y}{\pi D^2} \quad \text{e} \quad B_y = -\frac{2\mu_0 I'}{\pi D^2}\left(x - \frac{D}{4}\right)\,.$$

Sobrepondo os dois campos, obtém-se um campo constante dado por $\vec{B} = \frac{6\mu_0 I}{(2\pi+3\sqrt{3})D}\,\hat{e}_y$.