Escola Quark / Olimpíadas Internacionais de Física - 2010
Electromagnetismo - II

1. A intensidade da corrente induzida na espira é:

a) $I(t) = \frac{\omega\mu_0 N\ell_1^2 I_0}{LR}\,\sin(\omega t)\,.$

b) $I(t) = \frac{\omega\mu_0 N\pi a^2 I_0}{LR}\,\sin(\omega t)\,.$

2.) a) O campo magnético no interior de uma bobina muito longa pode determinar-se usando a lei de Ampère: admitindo que o campo no exterior é nulo, obtém-se, no interior da bobina considerada, $\vec{B} = \mu_0 \mathrm{n} I \hat{e}_z$, sendo n=N/$\ell$.

A intensidade de corrente I determina-se a partir de

$$V(t) = V_0\cos(\omega t) = L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \implies I(t) = \frac{V_0}{\omega L}\,\sin(\omega t)$$

Assim, o campo magnético no interior da bobina é dado por $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t)\,\hat{e}_z$, com $B_0 = \frac{\mu_0 \mathrm{n} V_0}{\omega L}$.

b) A força electromotriz (f.e.m.) induzida na bobina pequena é dada por

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{N}'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{B}\cdot\hat{n}S) = -\mathrm{N}'\omega B_0 \pi a'^{\,2}\,\cos(\omega t)$$

A amplitude da f.e.m. induzida é $\varepsilon_0 = \mathrm{N}'\,\omega B_0 \pi a'^2$, de onde se conclui, atendendo a que N$'$=N/4 e a$'$=a/4, $B_0 = \frac{64\,\varepsilon_0}{\omega \mathrm{N}\pi a^2}$.

Medindo a f.e.m. induzida, determina-se B_0 e pode comparar-se este valor com o valor teórico calculado em a).

c) Mesmo tratando-se de uma bobina muito longa, a expressão $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t)\,\hat{e}_z$ é aproximada, pois o campo é menos intenso nas extremidades da bobina: é cada vez menor o número de linhas de campo que atravessam a secção da bobina pequena e essas linhas são inclinadas em relação ao eixo dos zz; portanto a amplitude da f.e.m. que se mede deve ser menor.

3. Neste problema a ideia consiste em considerar que a variação com o tempo da energia cinética de rotação do anel é dissipada por efeito de Joule, devido às correntes induzidas no anel pelo facto de este se encontrar a rodar no campo magnético da Terra.

Escolhendo o eixo dos zz na direcção do diâmetro vertical em torno do qual o anel roda, a perpendicular ao plano do anel é $\hat{n} = \cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y$, com $\phi = \omega t$ (em face da *nota* no fim do enunciado, considera-se que a velocidade de rotação do anel diminui muito lentamente).

O fluxo do campo magnético através da superfície limitada pelo anel é

$\Phi_{\mathrm{mag.}} = B\cos 64^{\mathrm{o}}\ \sin(\omega t)\,\pi a^2$

e a potência média dissipada no anel é:

$$P_{\mathrm{med.}} = \frac{(\omega B\cos 64^{\mathrm{o}}\,\pi a^2)^2}{2R}$$

Por outro lado, a energia cinética de rotação é dada por $K_{\rm rot} = \frac{1}{2}\mathcal{I}\omega^2$, sendo o momento de inércia em relação ao eixo de rotação que estamos a considerar $\mathcal{I} = \frac{1}{2}\,ma^2$.

No seguimento do que se referiu no início, teremos, então:

$$\frac{(\omega B \cos 64^{\rm o}\, \pi a^2)^2}{2R} = -\frac{1}{2} m a^2 \omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

O instante t' tal que $\omega(t') = \omega/2$ obtém-se a partir da equação anterior e é $t' = 1,102352 \times 10^6$ s, ou seja, cerca de 12 dias e 18 horas!

4. Num circuito oscilador ideal, a carga do condensador e a corrente no circuito oscilam com amplitude constante. De acordo com as condições iniciais, podemos considerar $q(t) = Q_0\, \cos(\omega t)$ e $I(t) = \omega Q_0\, \sin(\omega t)$, com $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Inicialmente a energia está apenas armazenada no condensador e é igual a $U = \frac{1}{2}\,\frac{Q_0^2}{C}$. No instante t, a energia da bobina é dada por:

$$U_L(t) = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{1}{2} L (\omega Q_0 \sin(\omega t))^2$$

e a do condensador por:

$$U_C(t) = \frac{1}{2C} q^2(t) = \frac{1}{2C} (Q_0 \cos(\omega t))^2$$

Verifica-se que as expressões anteriores assumem o mesmo valor nos instantes $t = (2n{+}1)\,\frac{\pi}{4}\,\sqrt{LC}$ indicados no enunciado e que esse valor é metade da energia armazenada no condensador no instante $t = 0$.

5. A alínea a) desta questão já foi resolvida: é uma aplicação simples da lei de Ampère, que conduz a

$$\vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 I_0 \sin(\omega t)}{2\pi r}\,\hat{e}_\phi$$

Considerámos que o eixo dos zz tem a direcção e sentido da corrente "infinita".

Na alínea b) temos de novo uma aplicação da lei de Faraday:

A força electromotriz induzida no conjunto das N espiras quadradas é:

$$\varepsilon(t) = -\frac{\omega N \mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) \cos(\omega t)$$

Como

$$\varepsilon_{\rm ef} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = \frac{\omega N \mu_0 I_0\, a}{2\pi\sqrt{2}} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)\,,$$

obtém-se

$$I_{\rm ef} = \frac{2\pi \varepsilon_{\rm ef}}{\omega N \mu_0 a \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)}\,.$$

6. a) Quando a barra se move, a força electromotriz induzida no circuito $\varepsilon_i(t)$ e a correspondente corrente induzida $I(t)$ são dadas por:

$$\varepsilon_i(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B\ell v(t)\,, \quad \text{e} \quad I(t) = -\frac{B\ell v(t)}{R}\,,$$

respectivamente. A força que o campo magnético exerce sobre a barra obtém-se calculando a força de Laplace

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{F}| = I\ell B = \frac{(B\ell)^2}{R}\, v(t)$$

Esta força opõe-se ao movimento, pelo que a equação de movimento é:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{(B\ell)^2}{R}\, v(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{v(t)} = -\frac{(B\ell)^2}{mR}\, \mathrm{d}t$$

Integrando a equação anterior entre o instante $t = 0$ (em que a velocidade é v_0) e o instante t (em que a velocidade é $v(t)$) e relacionando as funções logaritmo e exponencial obtém-se o resultado referido no enunciado.

b) A aceleração da barra é $a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_0}{\tau}\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$, pelo que a barra pára no instante t' tal que

$$-v_0 = \int_0^{t'} a(t)\mathrm{d}t = v_0 \int_0^{t'} \left(-\frac{1}{\tau}\right) \mathrm{e}^{-t/\tau}\, \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-t'/\tau} - 1 = -1\,.$$

A distância percorrida pela barra até ao instante t' é

$$x(t') = \int_0^{t'} v(t)\mathrm{d}t = -v_0\,\tau \int_0^{t'} \left(-\frac{1}{\tau}\right) \mathrm{e}^{-t/\tau}\, \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad x(t') = v_0\,\tau\,.$$

c) A energia eléctrica dissipada no circuito obtém-se calculando $\int_0^{t'} RI^2(t)\, \mathrm{d}t$. Verifica-se que a energia cinética inicial da barra se dissipa por efeito Joule.

7. a) O módulo do campo magnético criado na origem, por cada um dos fios, é igual e dado pela expressão

$$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,; \qquad r = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}\,.$$

O campo resultante, $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, tem a direcção do eixo dos yy e a sua grandeza é

$$B = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, \cos\theta\,; \qquad \cos\theta = \frac{d/2}{r}$$

Atendendo à expressão da corrente $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ e à direcção do campo, podemos escrever

$$\vec{B}(t) = B_0 \sin(\omega t)\, \hat{e}_y \quad \text{com} \quad B_0 = \frac{2\mu_0 I_0 d}{\pi(4h^2 + d^2)}$$

b) O campo eléctrico induzido, no disco (moeda) de raio a colocado na origem, obtém-se usando a lei de Faraday: a força electromotriz induzida, ε_i, relaciona-se com o campo eléctrico induzido, $\vec{E}(r,t)$. Nos pontos à distância r do centro do disco:

$$\varepsilon_i(r,t) = \oint \vec{E}(r,t) \cdot \hat{t}\, \mathrm{d}\ell = E(r,t) \times 2\pi r\,.$$

Como

$$\varepsilon_i(r,t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\omega B_0 \pi r^2 \cos(\omega t)\,,$$

obtém-se

$$\vec{E}(r,t) = -\frac{\omega B_0 r}{2}\, \cos(\omega t)\, \hat{e}_\phi\,.$$

c) Podemos calcular a potência dissipada no disco, considerando-o como um conjunto de "fios circulares concêntricos". Um fio genérico tem comprimento $\ell = 2\pi r$, área da secção $\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}r$ e resistividade $\rho = 1/\sigma$. Como $\mathrm{d}I = J\,\mathrm{d}A = \sigma\,E\,\mathrm{d}A$, a intensidade de corrente no fio é

$$\mathrm{d}I(r,t) = -\frac{\sigma\omega B_0 r}{2}\,b\,\mathrm{d}r\,\cos(\omega t)$$

e a potência dissipada em cada "fio"

$$\mathrm{d}P(r,t) = \frac{\pi\sigma b}{2}(\omega B_0)^2\,\cos^2(\omega t)\,.$$

Integrando para todo o disco, obtemos

$$P(t) = \frac{\pi\sigma b}{2}(\omega B_0)^2\,\cos^2(\omega t)\,\frac{a^4}{4}\,,$$

que representa a potência instantânea dissipada no disco. Para obtermos a potência média, calculamos

$$P_{\text{med.}} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\pi\sigma b a^4(\omega B_0)^2\,.$$

Também se podia ter calculado a potência fornecida ao disco. Para cada "anel"percorrido pela corrente $\mathrm{d}I(r,t)$, a potência fornecida é $\mathrm{d}P(r,t) = \varepsilon_i(r,t)\,\mathrm{d}I(r,t)$. Integrando para todo o disco e tomando o valor médio obtém-se, como é de esperar, o mesmo resultado.

8. a) Quando o disco metálico cai com velocidade $\vec{v}$, a força magnética $\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$ faz mover os electrões da esquerda para a direita, "criando-se" assim uma distribuição de carga positiva na face esquerda e uma distribuição simétrica na face direita. O campo eléctrico que se estabelece entre as faces é aproximadamente uniforme e dado por $E = vB$. Podemos, por outro lado, relacionar este campo com a referida distribuição de cargas (equivalente a um condensador plano):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\pi R^2\,\varepsilon_0} \quad\Longrightarrow\quad Q = \varepsilon_0\pi R^2 vB\,.$$

b) Como se verificou, a carga depende da velocidade; se a velocidade variar com o tempo, a carga também varia e existe corrente de uma face para a outra:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0\pi R^2 B\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad\Longrightarrow\quad I = \varepsilon_0\pi R^2 Ba\,,$$

sendo I a intensidade de corrente e a a aceleração do disco.

O disco move-se sob a acção do seu peso e da força de Laplace exercida pelo campo magnético sobre a corrente I:

$$\vec{P} + \vec{F}_{\text{Lap.}} = m\vec{a} \quad\Longrightarrow\quad mg - IBd = ma\,,$$

de onde se obtém $a = g/(1 + \varepsilon_0\pi R^2 B^2 d/m)$.

c) Considerando o efeito do campo magnético como uma pequena perturbação, podemos escrever a expressão obtida para a aceleração como

$$a \simeq g\left(1 - \frac{\varepsilon_0\pi R^2 B^2 d}{m}\right)$$

A razão $\pi R^2 d/m$ é o inverso da massa volúmica do disco; podemos considerar que o disco é de alumínio, $\rho_{\mathrm{A}\ell} = 2,7\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$. Fazendo $B = 0,1\ \mathrm{T}$ e $\varepsilon_0 = 8,85\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}$, obtém-se $(g-a)/g \simeq 3,27\times10^{-16}$, que é um efeito na prática indetectável.

9. Quando o anel está a cair vai variando o fluxo magnético através da área por ele delimitada.A força electromotriz induzida no anel é

$$\varepsilon(t) \;=\; \alpha\, B_0\, \pi\, r_0^2\, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,.$$

Como a resistência do anel é nula, $\varepsilon = \mathcal{L}\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$; obtém-se assim a expressão da corrente induzida no anel:

$$I(t) \;=\; \frac{\alpha\, B_0\, \pi\, r_0^2}{\mathcal{L}}\, z(t)$$

Esta corrente fica sob a acção do campo magnético dado e, portanto, sujeita a forças que podemos calcular, usando a expressão da força de Laplace: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B}$.

A resultante destas forças é $\vec{F} = -kz\,\hat{e}_z$, com $k = \frac{2\alpha\,\beta B_0^2\,(\pi\, r_0^2)^2}{\mathcal{L}}$.

Além desta força, que aponta no sentido de B_z (note-se que o anel move-se a partir de $z = 0$ para a região de valores negativos de z), actua sobre o anel o peso, dado por $\vec{P} = -mg\,\hat{e}_z$

O anel terá um movimento oscilatório entre $z = 0$ e $z_{\mathrm{max.}} = -2mg/k$, ou seja, $z(t) = \frac{g}{\omega^2}\,[\cos(\omega t) - 1]$, com $\omega = \sqrt{k/m}$.

Assim, a expressão da corrente no anel, explicitamente em função do tempo, será:

$$I(t) \;=\; \frac{\alpha\, B_0\, \pi\, r_0^2\, g}{\mathcal{L}\,\omega^2}\,[\cos(\omega t) - 1]$$

Pode verificar-se que $I_{\mathrm{max.}} \simeq 39$ A.

10. Neste problema, devemos começar por notar que as cargas existentes no disco condutor rodam no sentido dos ponteiros do relógio com velocidade $\vec{v} = -\omega r\hat{e}_\phi$. Como estão sob a acção de um campo magnético, ficam sujeitas a forças que as levam a mover-se da periferia para o centro (as cargas negativas), contribuindo para "fechar o circuito"entre os contactos C_1 e C_2. A diferença de potencial que deste modo se estabelece é $V_{C_2} - V_{C_1} = \omega B r_0^2/2$.

Quanto à alínea b), sabemos que quando o movimento de rotação do disco passar a ser uniforme, isso significa que o momento da tensão exercida pelo fio, $\mathcal{M}_T = Mgr_0$ é igual, em módulo, ao momento da força de Laplace exercida pelo campo magnético sobre a corrente I que circula de C_2 para C_1 (obtida em a)).

Também se pode analisar o problema por considerações de energia. Neste caso, identificamos as seguintes parcelas:

(1) - Variação da energia potencial da massa M no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$;

(2) - Variação da energia cinética da massa M no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$;

(3) - Variação da energia cinética de rotação do disco no intervalo de tempo $\mathrm{d}t$;

(4) - Energia dissipada por unidade de tempo (potência) na resistência R

Deve verificar-se (1) = (2)+(3)+(4). Na situação pretendida nesta alínea tem-se $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ constante, o que conduz rapidamente ao resultado.

A seguir estão os resultados das duas alíneas.

a) $I = \frac{\omega B r_0^2}{2R}\,.$

b) $\omega_f = \frac{4RMg}{B^2 r_0^3}\,; \quad I_f = \frac{2Mg}{Br_0}\,.$