

- ELECTROMAGNETISMO -

Algumas datas importantes:

1600 — William Gilbert "De Magnete"

1746 — Peter van Musschenbroek
(A garrafa de Leiden — o primeiro condensador)

1.60 — Benjamin Franklin
(o primeiro pára-raios)

1767 — Priestley
1771 — Cavendish
1785 — Coulomb } estudos quantitativos sobre os efeitos entre corpos carregados.

1800 — Alessandro Volta (invenção da pilha)

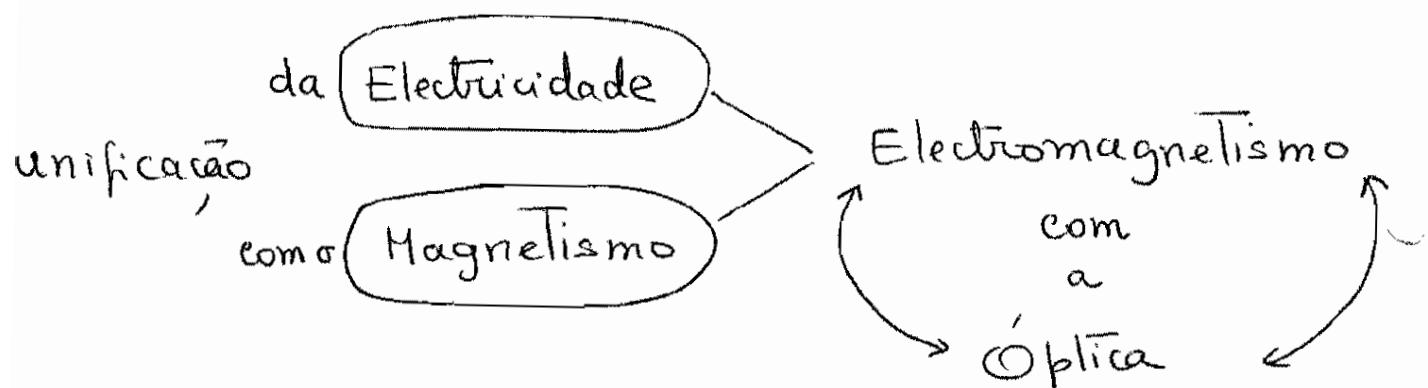
1813 — Sir Humphry Davy (invenção da lâmpada de arco)

1820 — Hans C. Oersted (a corrente eléctrica cria um campo magnético)

1820	J. Biot e F. Savart A. Marie Ampère D. Arago Laplace	estudo dos campos magnéticos criados por diversos tipos de circuitos; lei de Biot e Savart, ...
		

1831 - J. Henry
M. Faraday
H. Lenz (as leis da indução electromagnética)

1865 — J. Maxwell (equações do campo eletrromagnético)



1887 — H. Hertz — produção e detecção das ondas hertzianas

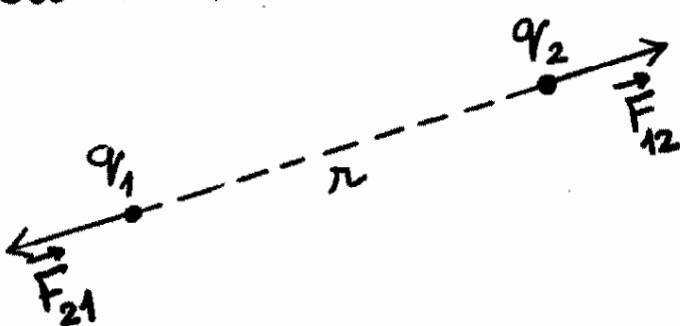
1897 - J. J. Thomson } identificação do
 electrão : determinação
 1909 - R. Millikan } da carga e da massa
 do electrão .

Semelhanças e diferenças entre

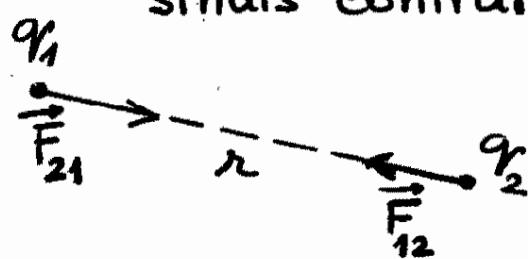
a lei de Coulomb

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

q_1 e q_2
do mesmo sinal



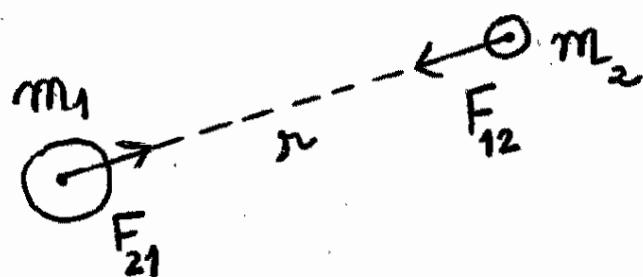
q_1 e q_2 de
sinais contrários



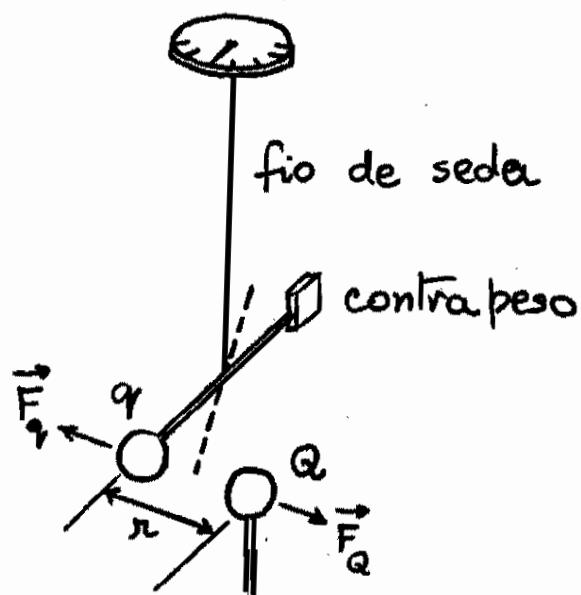
e a lei de atracção entre duas massas

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

força sempre
attractiva



Balança de torção de
Coulomb



$$F = K \frac{qQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \quad (\text{sistema SI})$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$$

$$\epsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

↑

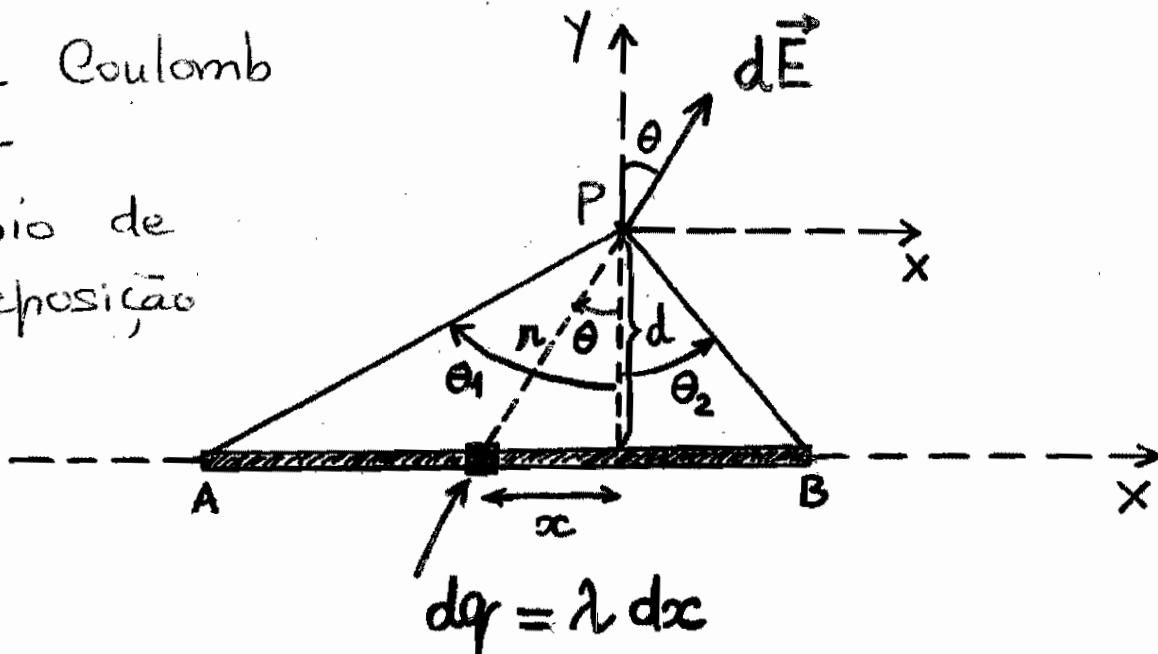
permittividade elétrica do vazio

Campo elétrico criado por uma distribuição linear de carga com densidade uniforme $\lambda \text{ C/m}$

Lei de Coulomb

+

Princípio de superposição



$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \quad \begin{matrix} \text{em que} \\ r^2 = d^2 + x^2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} dE_x = -dE \sin\theta \\ dE_y = dE \cos\theta \end{cases}$$

$$\left\{ E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \right.$$

$$\left. E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \right.$$

Linha "infinita"



$$\theta_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{d} \end{cases}$$

LEI DE GAUSS

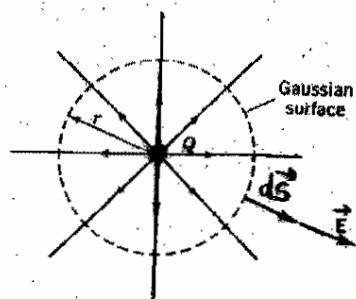


FIGURE 24.6 A spherical Gaussian surface around a point charge.

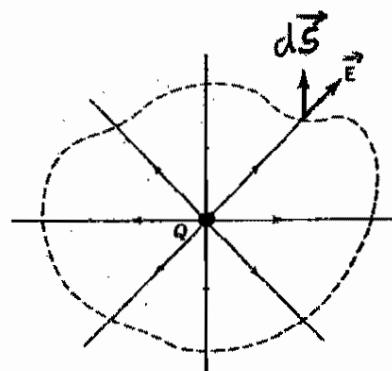
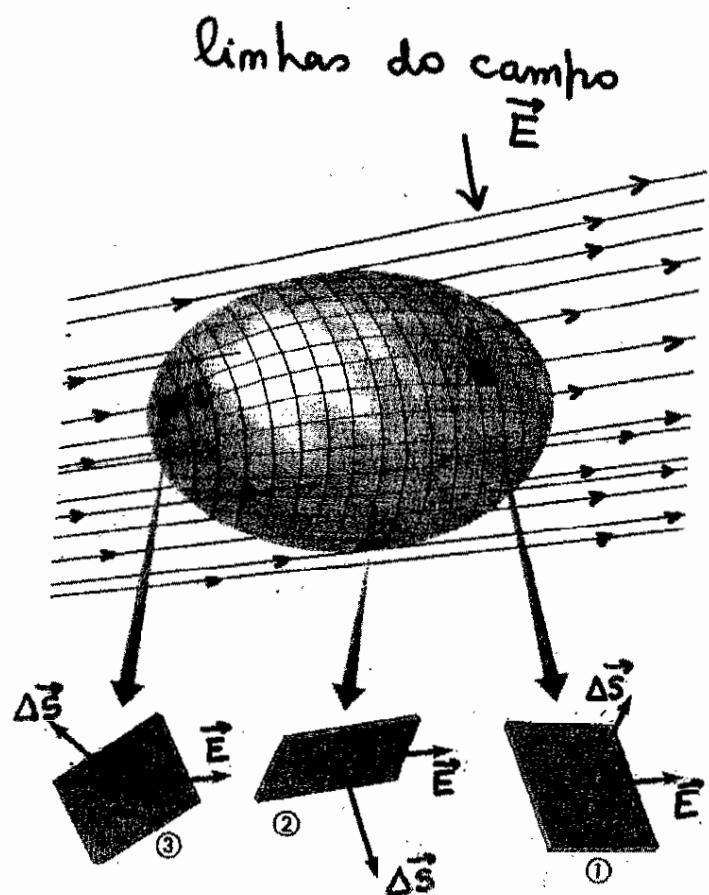


FIGURE 24.7 A Gaussian surface of arbitrary shape around a point charge. The flux through this surface is the same as that for a spherical surface around the charge.



linhas do campo
 \vec{E}
 Superfície fechada
 numa região onde
 existe um campo
 eléctrico \vec{E}

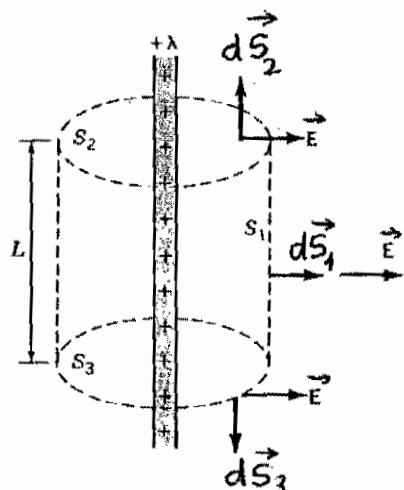
A superfície está
 dividida em pequenos
 quadrados de área ΔS

O fluxo através de um
 elemento de área é

$$\Delta\phi = \vec{E} \cdot \hat{n} \Delta S = \vec{E} \cdot \vec{\Delta S}$$

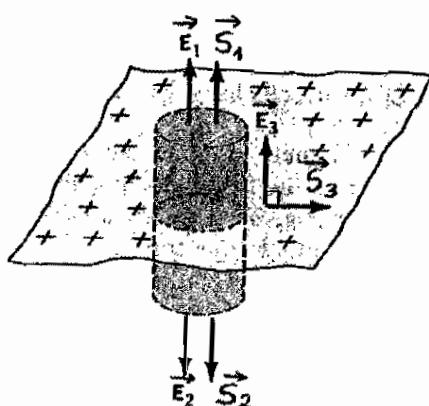
$\Delta\phi$ pode ser positivo (em ①)
 nulo (em ②)
 ou negativo (em ③)

LEI DE GAUSS



$$d\vec{S} = \hat{n} dS$$

FIGURE 24.11 A cylindrical Gaussian surface around an infinite line of charge. There is flux only through the curved surface.



Plano infinito
com densidade uniforme
de carga $\sigma \text{ C/m}^2$

FIGURE 24.12 A Gaussian "pillbox" appropriate for an infinite sheet of charge. Flux passes through only the end faces.

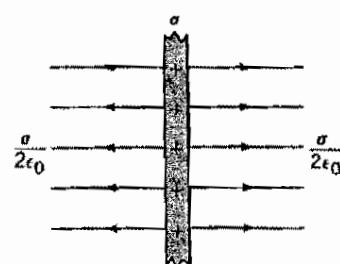
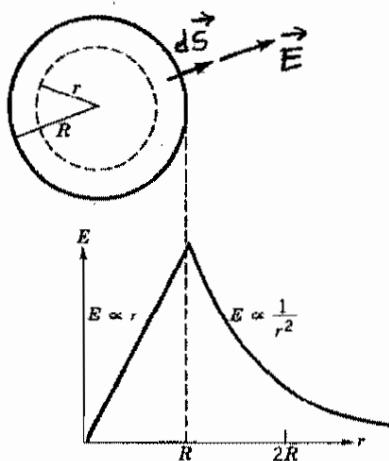


FIGURE 24.13 The field of an infinite sheet of charge is uniform.

LEI DE GAUSS



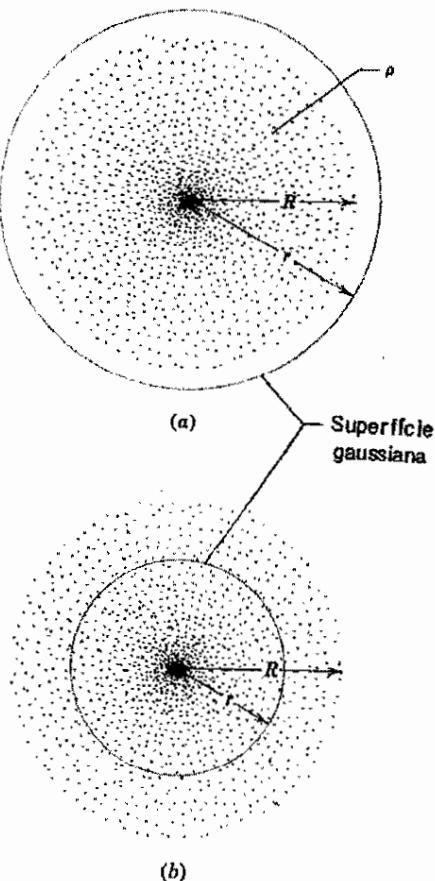
- Distribuição uniforme de carga

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (\text{C/m}^3)$$

FIGURE 24.10 A spherical Gaussian surface within a uniformly charged sphere.

- Distribuição de carga com simetria esférica $\rho(r) \quad (\text{C/m}^3)$

p. ex. $\rho(r) = k(R-r)$
 ↓
 constante



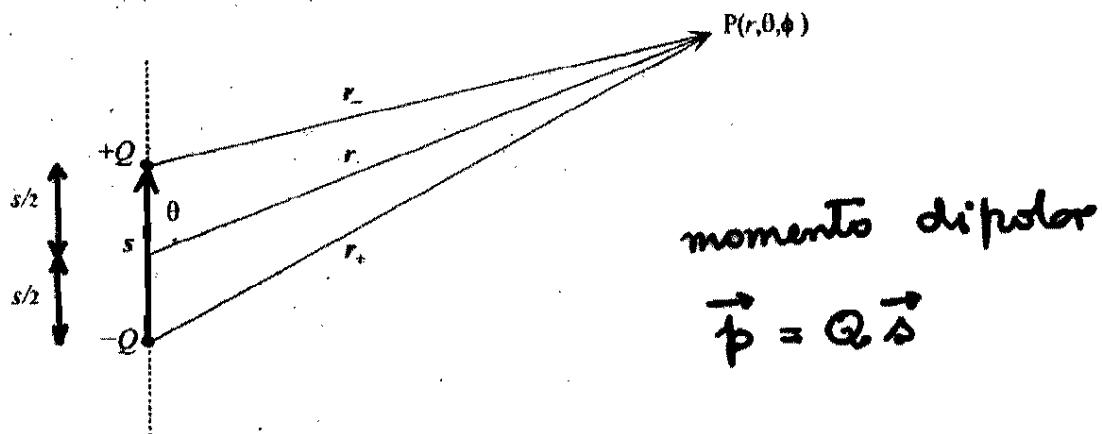
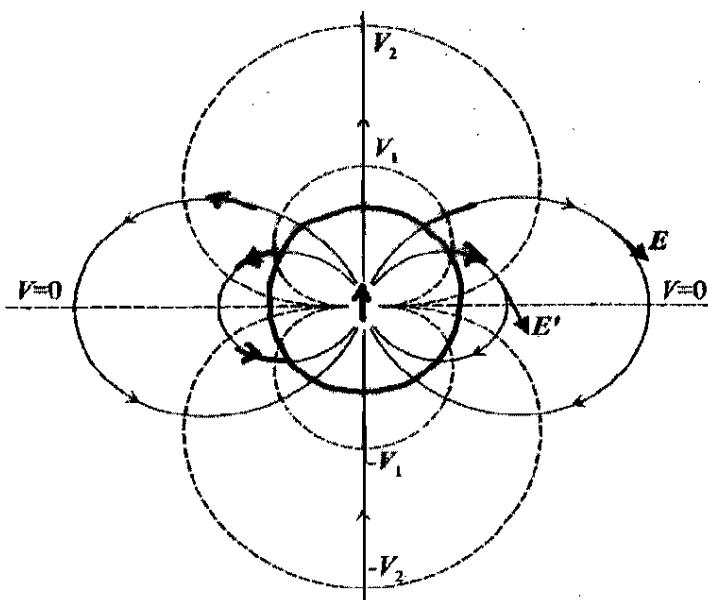
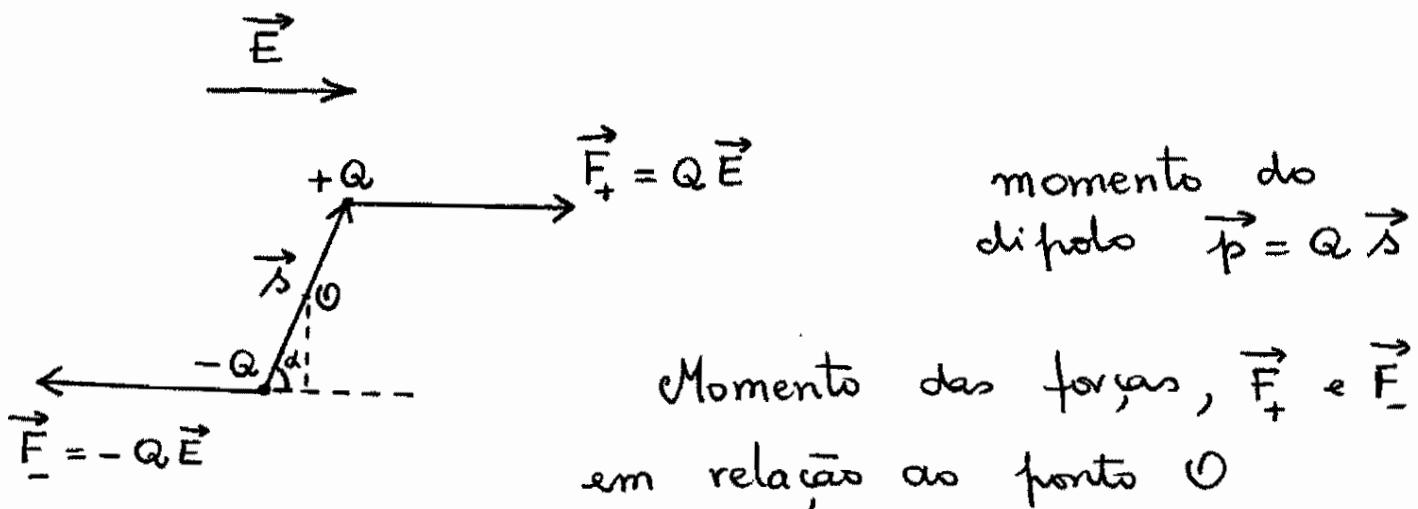


Figura 4.1. Dipolo eléctrico.



Campo Electromagnético , cap. 4

Acção de um campo eléctrico uniforme \vec{E} sobre um dipolo: alinhamento com o campo



$$M_b = 2 Q E \frac{\Delta}{2} \sin \alpha = p E \sin \alpha$$

Vectorialmente: $\vec{M}_b = \vec{p} \wedge \vec{E}$

Energia de um dipolo em interacção com um campo eléctrico uniforme \vec{E}

$$U_{int} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

A energia de interacção é mínima quando \vec{p} se alinha com \vec{E} .

A força eléctrica leva o dipolo a alinhar-se com o campo; para o afastar dessa posição é necessário fornecer-lhe energia correspondente ao trabalho realizado por uma força exterior.

Nomeadamente para inverter o dipolo (anti-alinhá-lo com o campo) é necessário fornecer a energia

$$U = 2 p E$$

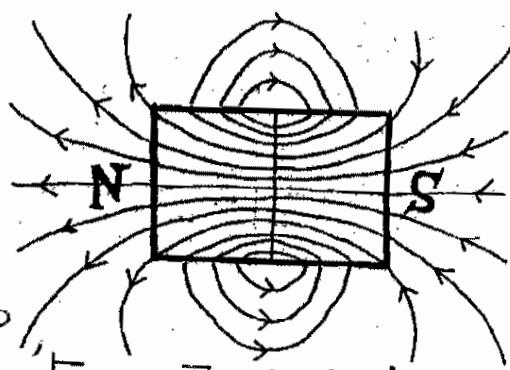
Um íman ou magnet cria

um CAMPO MAGNÉTICO

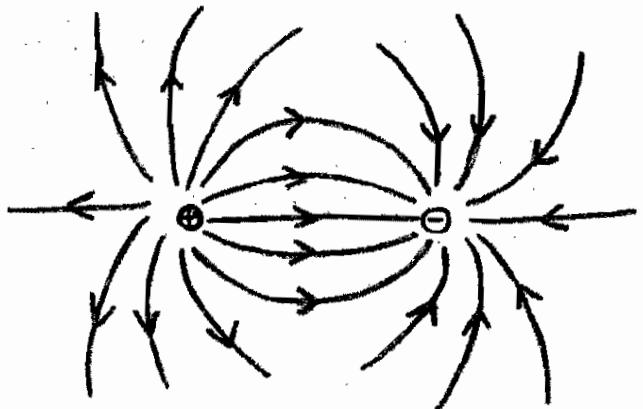
Qualquer magneto cria à sua volta uma zona de influência, isto é, um campo, o campo magnético. Com um íman e limalha de ferro é possível "ver" as linhas de força do campo.

Dipolo elétrico

Dipolo magnético



As linhas do campo magnético são fechadas.

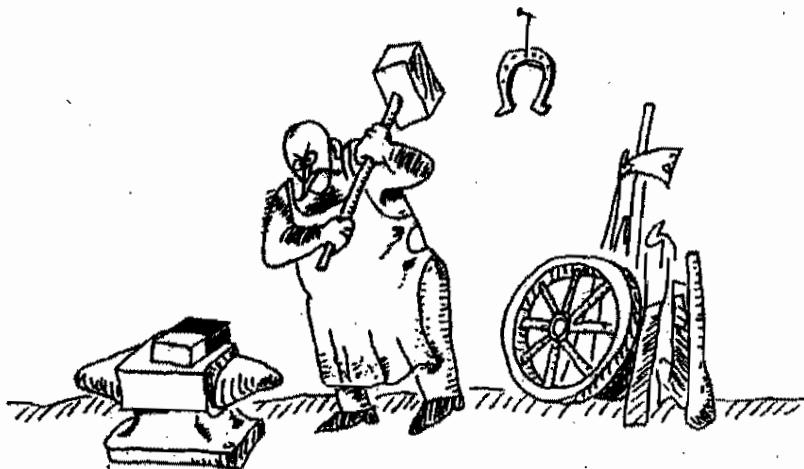


As linhas de força do campo magnético são semelhantes às linhas de força de um dipolo eléctrico (carga positiva de um lado, carga negativa do outro), só que neste caso, o campo é o campo magnético e não o campo eléctrico. Um magneto comporta-se então como um *dipolo magnético* (com uma extremidade positiva, o Norte, e uma extremidade negativa, o Sul).

O isolamento de um pólo magnético nunca foi possível: um dipolo partido ao meio torna a dar um dipolo. Pensa-se, por isso, que os monopolos magnéticos, isto é cargas magnéticas isoladas, talvez não existam.

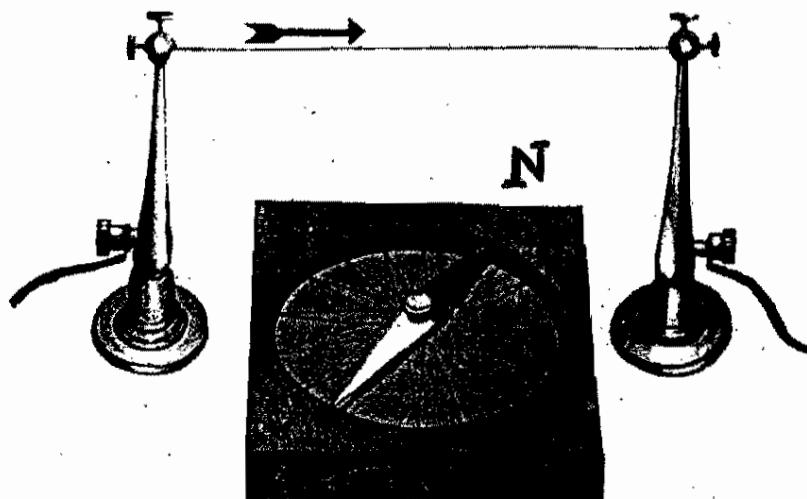
As linhas do campo elétrico são abertas:

partem de cargas +
e terminam em cargas -.



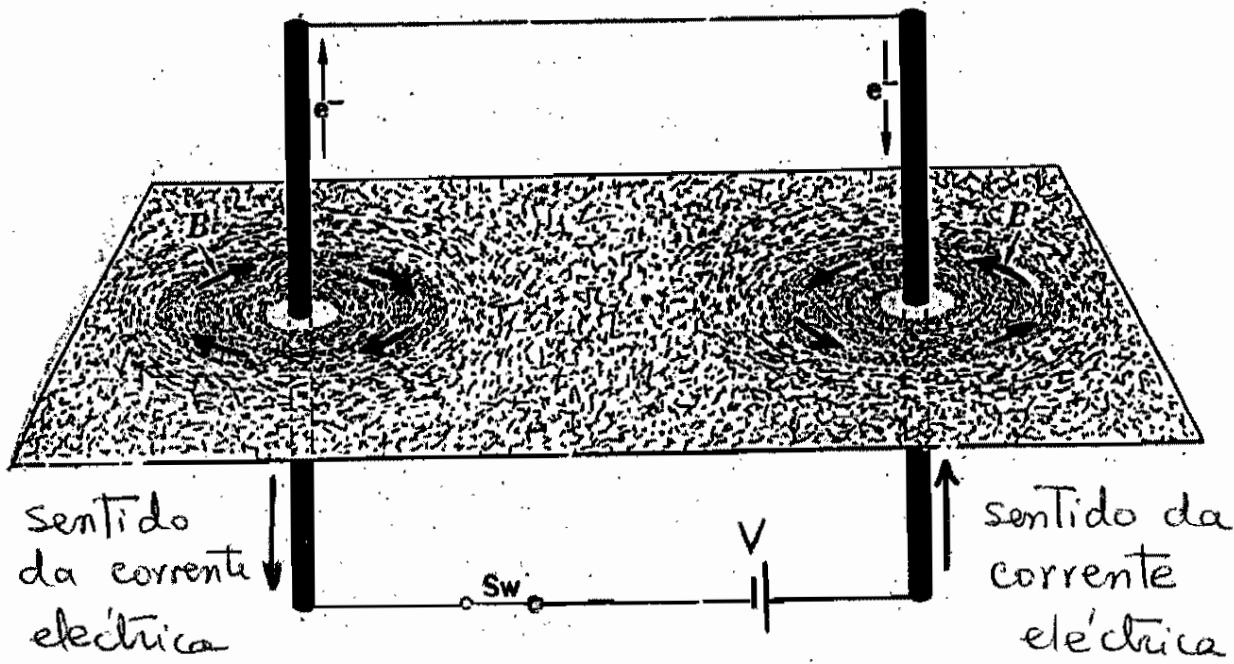
$$+ \ominus = +\ominus + +\ominus$$

EXPERIÊNCIA DE OERSTED (1820)



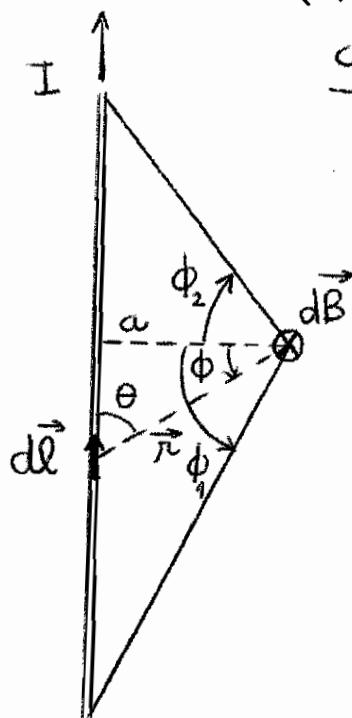
Uma corrente elétrica cria um campo magnético.

Um "desenho" das linhas do campo magnético



Aplicação da Lei de Biot e Savart e
do princípio de superposição

(1) Condutor rectilíneo percorrido pela corrente I



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} d\vec{l} \wedge \hat{r}$$

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} dl \sin\theta$$

$$a = r \cos\phi \rightarrow r^2 = \frac{a^2}{\cos^2\phi}$$

$$l = a \tan\phi \rightarrow dl = a \sec^2\phi d\phi$$

$$\sin\theta = \cos\phi$$

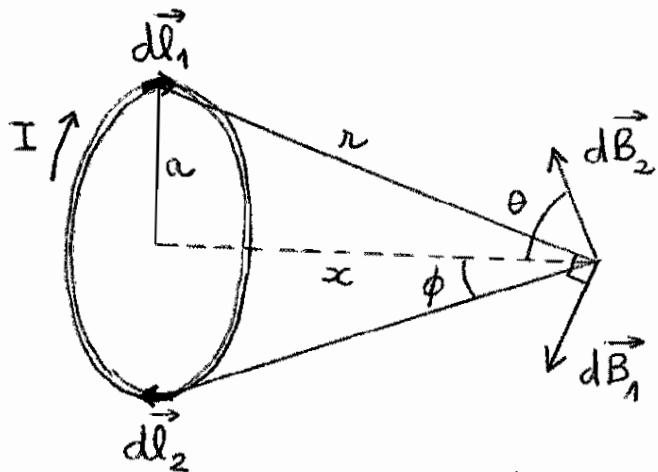
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{a \sec^2\phi \cos^2\phi}{a^2} \cos\phi d\phi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin\phi_2 - \sin\phi_1)$$

Condutor "infinito": $\phi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ e $\phi_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

(2) Espira circular de raio a percorrida
pela corrente I



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{l} \wedge \hat{r} \quad d\vec{l} \perp \hat{r}$$

$$(dB)_{\text{segundo}} = |d\vec{B}| \cos\theta = |d\vec{B}| \sin\phi$$

o eixo da
espira

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin\phi \int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin\phi \times 2\pi a$$

$$r^2 = a^2 + x^2 \quad \text{e} \quad \sin\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

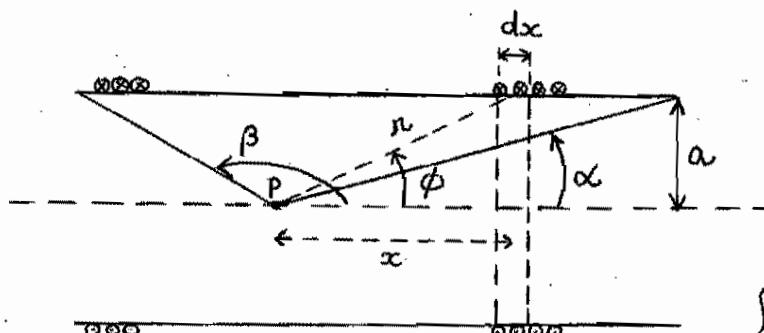
$\rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2a} \text{ no centro da espira } (x=0)$
 $\searrow B = \frac{\mu_0 I A}{2\pi x^3}, \text{ para } x \gg a$

A é a área limitada pela
espira e $m = IA$, a grandeza do momento dipolar magnético da espira.

3) SOLENÓIDE DE COMPRIMENTO L FORMADO POR

N espiras uniformemente
distribuídas

$$m = \frac{N}{L}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = a \cotan \phi \\ dx = -a \cosec^2 \phi d\phi \end{array} \right.$$

CAMPO \vec{B} criado em P : sobreposição dos campos devidos a cada "anel de corrente"

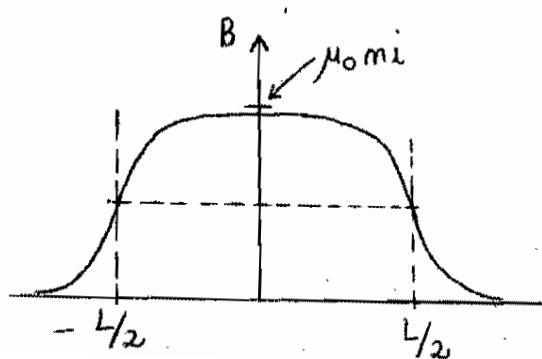
$$dB = \frac{\mu_0 m i}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx \quad m i dx = \text{corrente num anel}$$

campo de um "anel de corrente" num ponto do eixo.

Integrandos para todos os anéis (espiras) :

$$B = \frac{\mu_0 m i}{2} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

- ponto no centro de um solenoide muito longo : $\alpha \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow \pi \Rightarrow B = \mu_0 m i$
- ponto num extremo de um solenoide muito longo : $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ e $\beta \rightarrow \pi \Rightarrow B = \frac{\mu_0 m i}{2}$



Distribuição de linhas do campo magnético

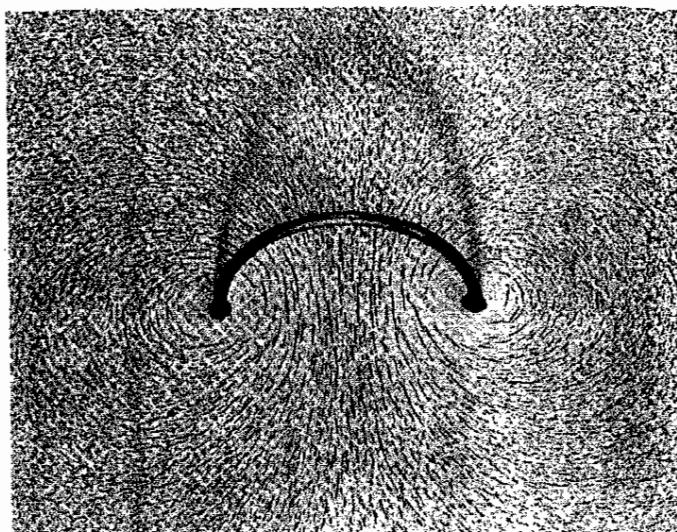


FIGURE 30.8 The pattern of iron filings for a current-carrying loop.

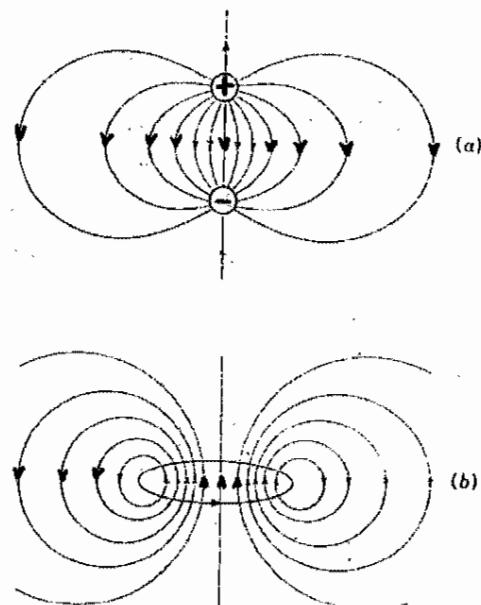


FIGURE 30.9 The field lines for (a) an electric dipole and (b) for a magnetic dipole. Although the far fields appear to be similar, the near fields are in opposite directions.

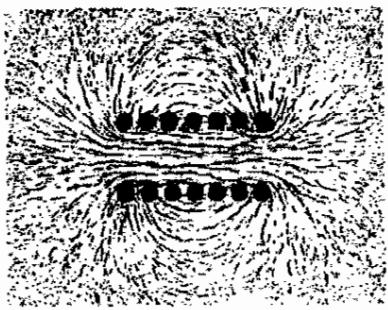


FIGURE 30.10 The pattern of iron filings for seven loops.

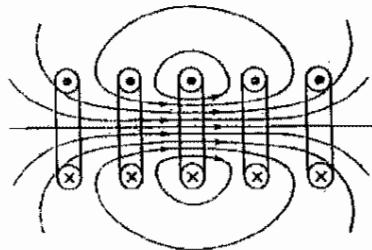


FIGURE 30.11 The field lines for five loops.

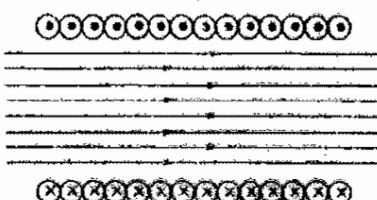
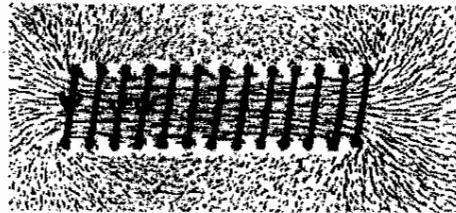
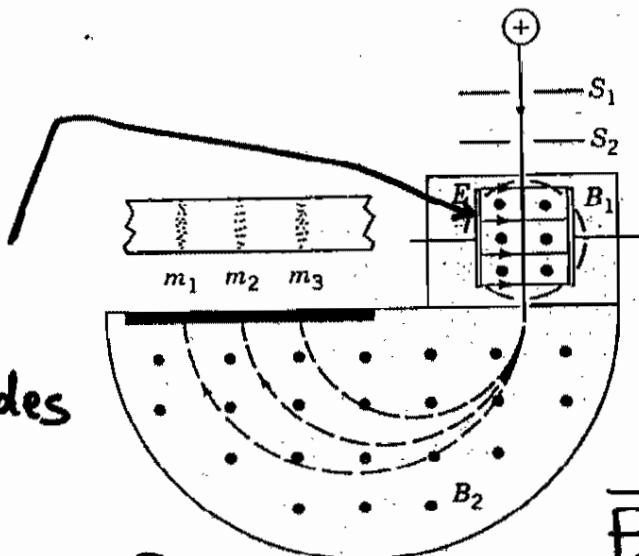


FIGURE 30.12 The field within a long solenoid is uniform. Outside, it is essentially zero.

Um campo magnético exerce uma força sobre uma carga elétrica em movimento



$$\vec{F}_{\text{mag}} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Espectrómetro de massa

seletor de velocidades
↓

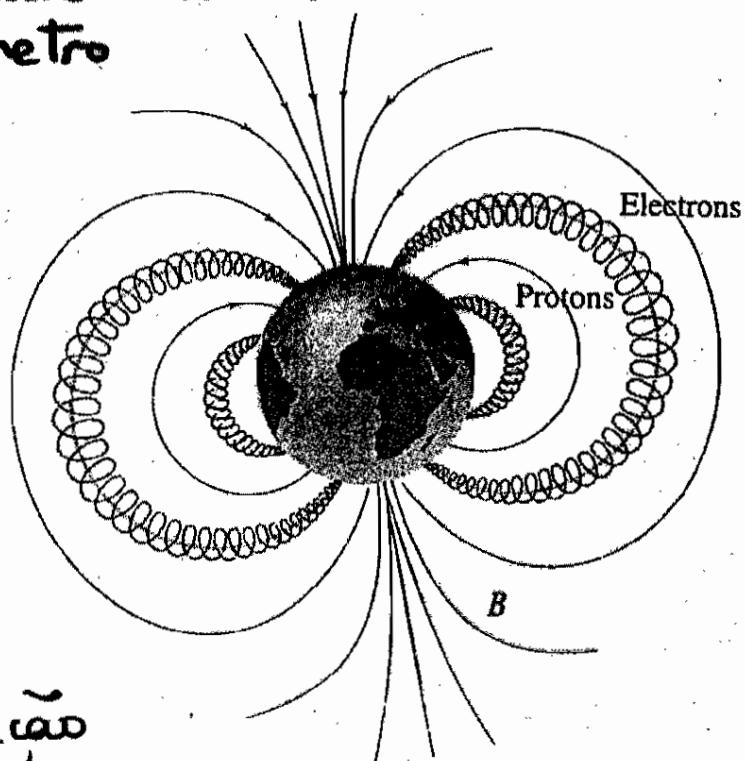
$$qE = qvB_1$$

$v = \frac{E}{B_1}$ ← apenas os íões com esta velocidade entram no espectrómetro

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q \vec{v} \wedge \vec{B}_2$$

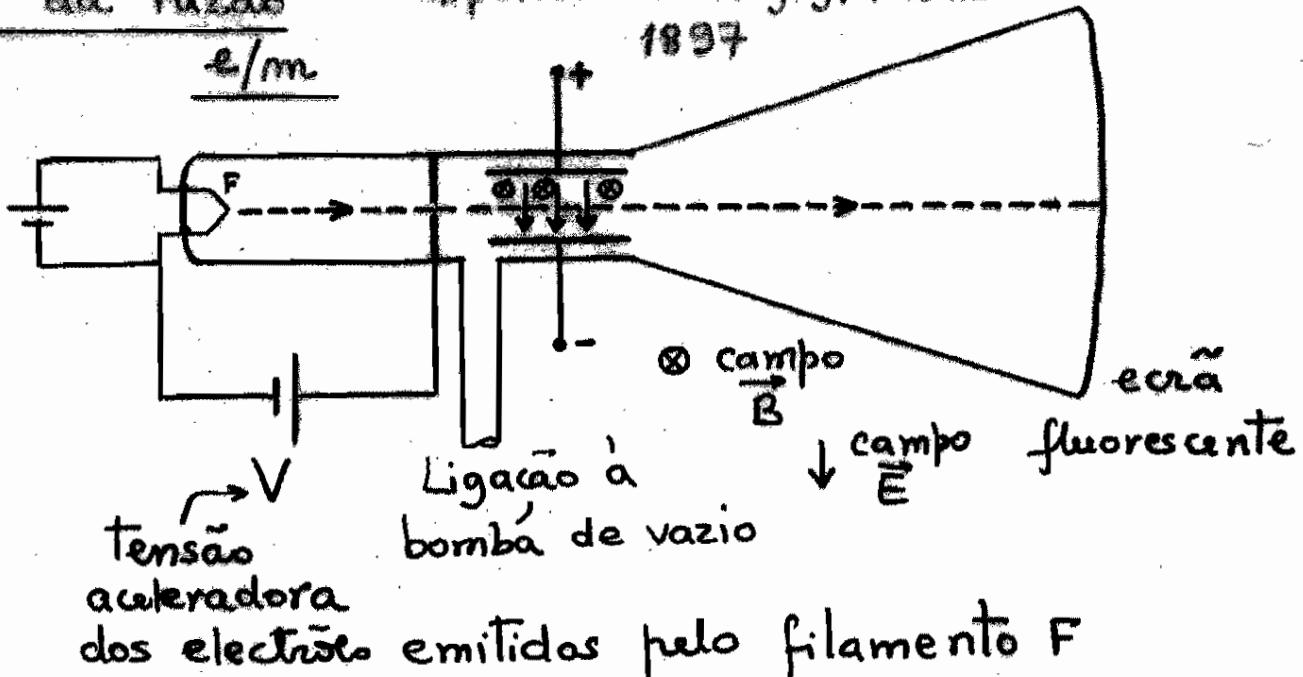
$$qvB_2 = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB_2}$$

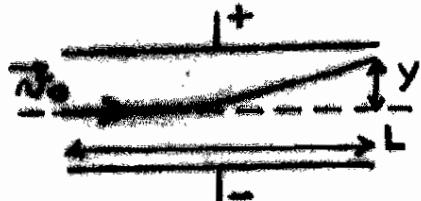


Cinturões de radiação de Van Allen

Medição da razão --- Experiência de J. J. Thomson



- Desvio das cargas negativas devido apenas ao campo \vec{E}



$$y = \frac{eE}{2m} \frac{L^2}{N_0^2}$$

- Efeito simultâneo dos campos \vec{E} e \vec{B}

$$F_e = F_{mag} \rightarrow eE = eN_0 B$$

$$N_0 = \frac{E}{B}$$

Assim:

$$\frac{e}{m} = \frac{2yE}{L^2 B^2}$$

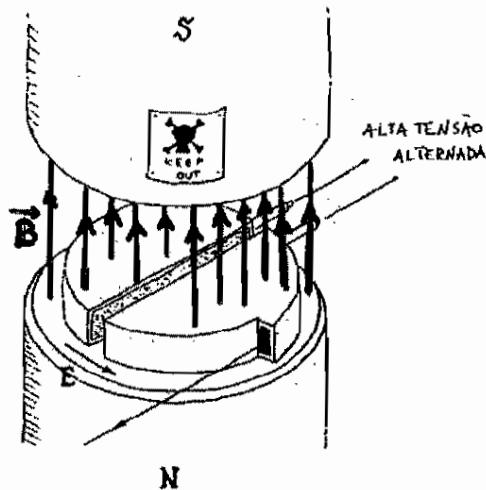
$\left. \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\}$ Campos
ajustáveis

$y \rightarrow$ dimensões do tubo e
desvio medido no ecrã

$L \rightarrow$ características do aparelho

UTILIZAÇÃO DE CAMPOS MAGNÉTICOS EM ACELERADORES DE PARTÍCULAS

A acção de campos magnéticos em cargas em movimento é utilizada para guiar feixes de partículas nos aceleradores. O ciclotrão de Lawrence foi a primeira máquina para acelerar partículas a grandes velocidades. O facto do ciclotrão e de uma grande parte dos aceleradores de partículas serem aproximadamente circulares está ligado ao uso de campos magnéticos que fazem as partículas mudar de direcção e levam a órbitas fechadas.



O ciclotrão é constituído por duas cavidades semicilíndricas imersas num campo magnético uniforme e separadas por uma fenda estreita onde se aplica um tensão alterna. Devido ao campo magnético, as partículas carregadas seguem trajectórias circulares com velocidade constante fora dessa fenda. A aceleração das partículas é efectuada pelo campo eléctrico existente na fenda, que tem de ser aplicado sempre no sentido da velocidade das partículas carregadas.

$$\text{A força de Lorentz : } \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

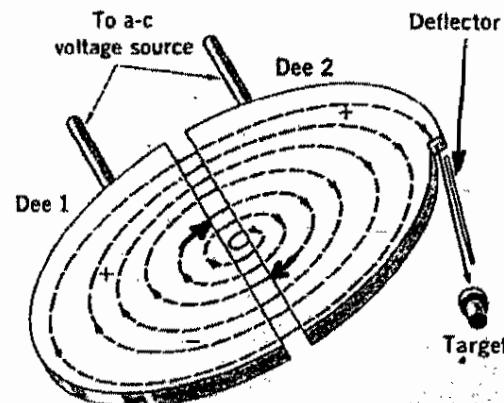
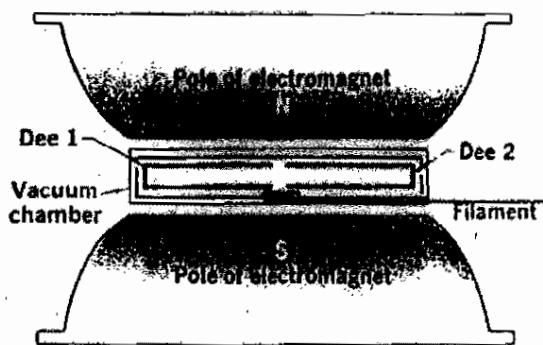


Figure 25-8. Schematic diagram of a cyclotron.

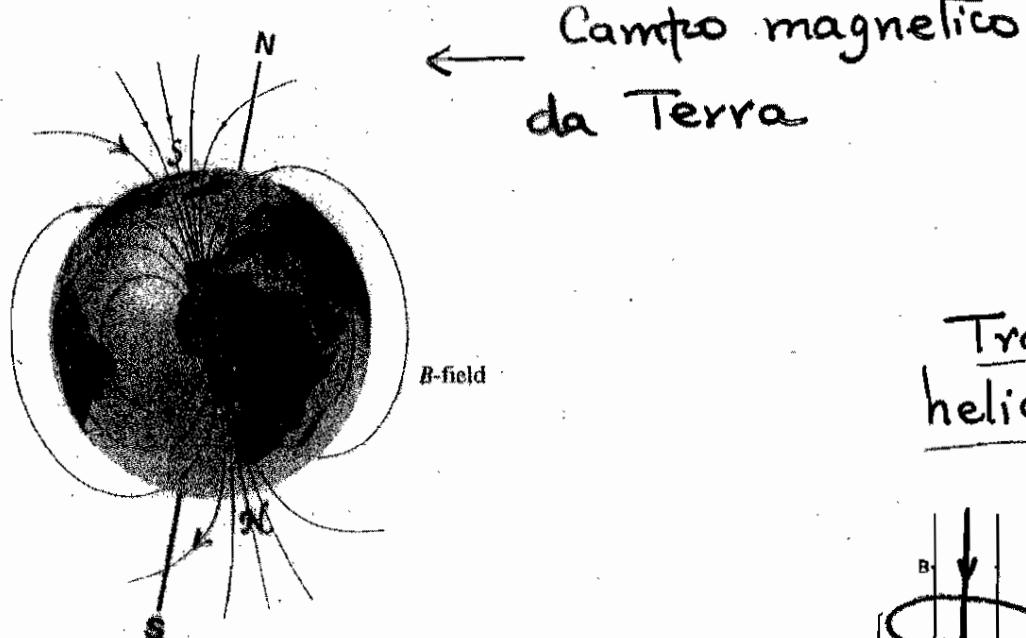
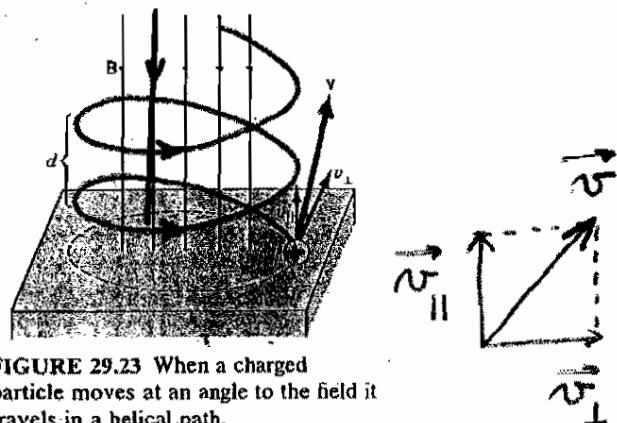


Figure 21.9 The Earth's magnetic influence resembles that of a tilted bar magnet. A compass needle aligns itself with the field and points roughly toward the north geographic pole, which is not far from the Earth's south magnetic pole. The field extends thousands of kilometers out into space and is rotationally symmetrical around the axis of the hypothetical bar magnet.

Trajetórias helicoidais



Campo magnético não uniforme

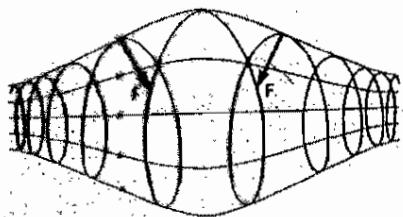
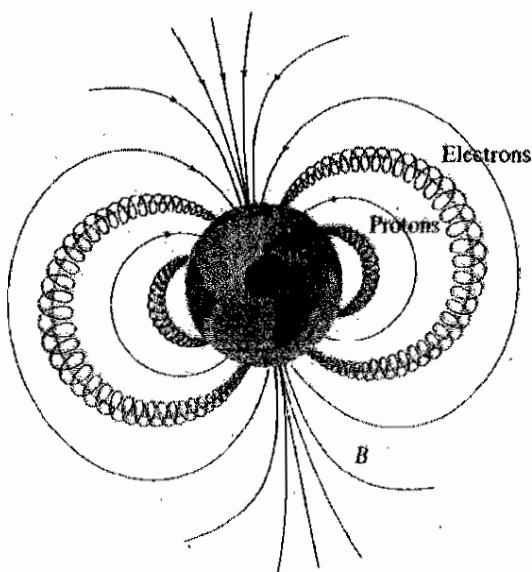


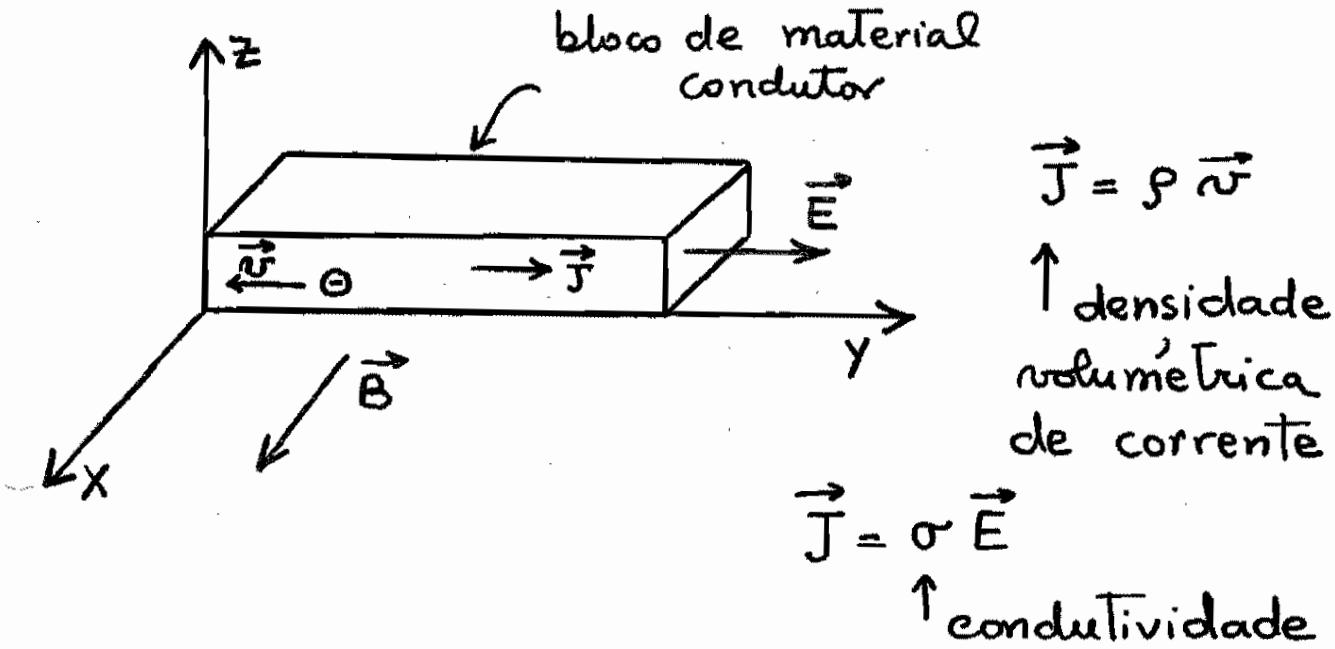
FIGURE 29.24 In a nonuniform magnetic field a charged particle experiences a force directed toward regions where the field is weaker. The direction of motion along the spiral path may be reversed. This is the principle of the "magnetic bottle."

Cinturões de radiação de Van Allen:

partículas "aprisionadas" no campo magnético da Terra oscilam entre os Pólos Norte e Sul.



EFEITO de HALL



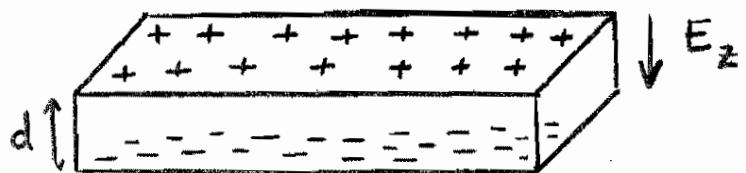
- Aplicação de um campo magnético \vec{B} segundo o eixo dos xx

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q \vec{n} \wedge \vec{B}$$

← a força sobre os elétrões aponta no sentido oposto ao eixo dos zz

$\downarrow \vec{F}_{\text{mag.}}$

- A acumulação de cargas negativas na face inferior do bloco condutor faz surgir um campo elétrico



$\downarrow E_z$ ← Este campo exerce uma força sobre os elétrões que tende a equilibrar a força magnética

$$\uparrow \vec{F}_{\text{el.}} \quad F_{\text{el.}} = |q| E_z$$

$$\text{Em equilíbrio : } q E_z = q n \vec{B}$$

$$E_z = n B$$

- densidade de corrente : $\vec{J} = \rho \vec{n} = m q \vec{n}$
 n° de portadores de carga
 por unidade de volume
- $E_z = \frac{V}{d} \leftarrow \text{d.d.p. (medida entre as faces da barra)}$
 $d \leftarrow \text{espessura da barra condutora}$

$$E_z = n B \rightarrow E_z = \frac{J}{m q} B$$

$$\boxed{\frac{E_z}{J B} = \frac{1}{m q}}$$

(a) Conhecidos J (a partir da intensidade de corrente)

B (campo aplicado)

E_z (obtido da d.d.p. medida)

pode estudar-se a "estrutura" do material;

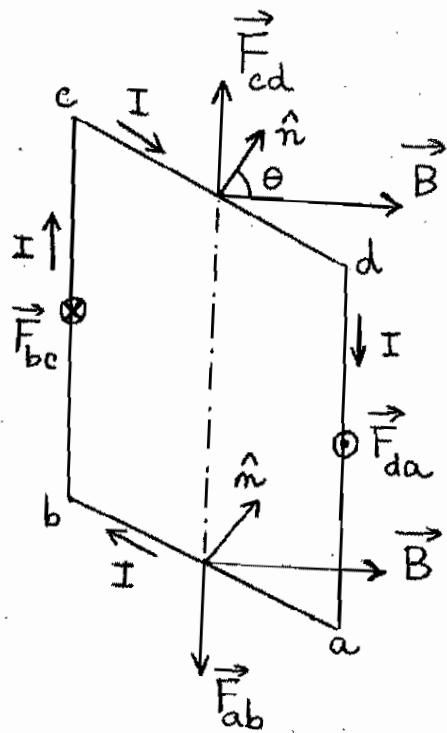
(b) Conhecidos J , E_z e

o coeficiente de Hall $\frac{1}{m q}$

pode determinar-se o campo magnético.

Acção de um campo magnético uniforme \vec{B} sobre uma espira de corrente

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$



$$|d\vec{F}_{ab}| = I dl B \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = I dl B \cos\theta$$

$$|\vec{F}_{ab}| = I B \cos\theta l_{ab}$$

$$|\vec{F}_{cd}| = I B \cos\theta l_{cd}$$

estas forças não produzem efeito sobre a espira

$$|\vec{F}_{bc}| = |\vec{F}_{da}| = IBl$$

estas forças formam um binário

que faz rodar a espira, de modo a que o seu plano fique perpendicular a \vec{B} .

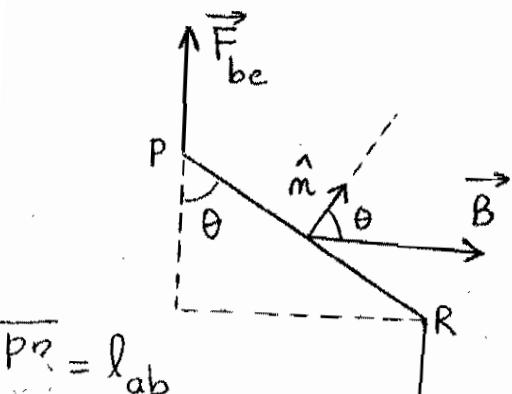
Calculo do momento das forças em relação a P :

$$|\vec{M}| = F_{da} PR \sin\theta =$$

$$= IB l \underbrace{l_{ab}}_{ab} \sin\theta = IBA \sin\theta$$

A = área limitada pela espira

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$



rendo

$$\vec{m} = IA \hat{m}$$

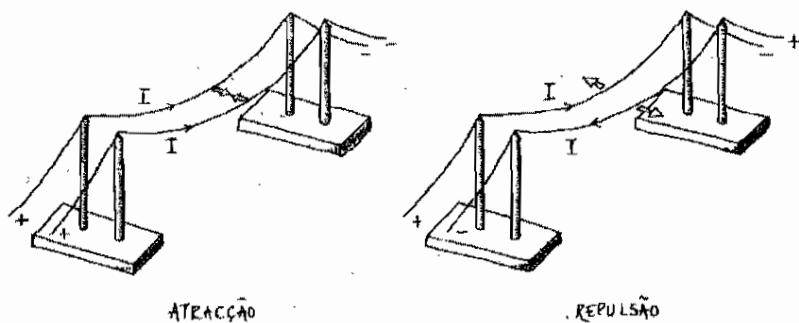
o momento magnético da espira.

Força de Laplace : $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$

↓

força exercida sobre cada elemento $d\vec{l}$ de um circuito, percorrido pela corrente I , quando colocado numa região onde existe um campo magnético \vec{B}

Dois correntes elétricas exercem forças uma sobre a outra : estas forças são atrativas se as correntes tiverem o mesmo sentido e são repulsivas se tiverem sentidos opostos.



Força entre duas correntes paralelas à distância r

I_1 I_2

$$d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}(I_1) = I_2 d\vec{l}_2 \hat{e}_z \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{e}_\phi$$

$$= - d\vec{l}_2 \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} \hat{e}_r$$

$d\vec{F}_1$ $d\vec{l}_2$

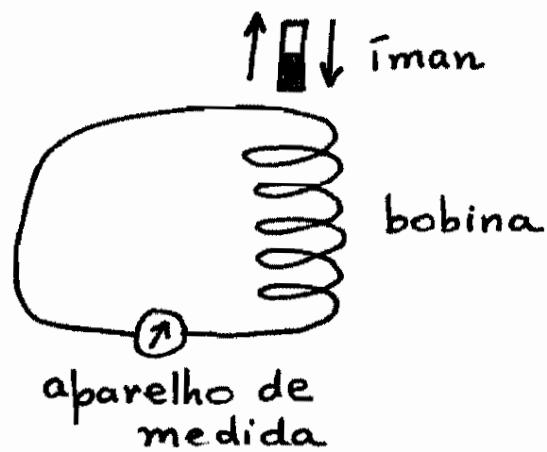
$$\frac{d\vec{F}_2}{d\vec{l}_2} = - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \hat{e}_r$$

Analogamente $\frac{|d\vec{F}_1|}{dl_1} = \frac{|d\vec{F}_2|}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$

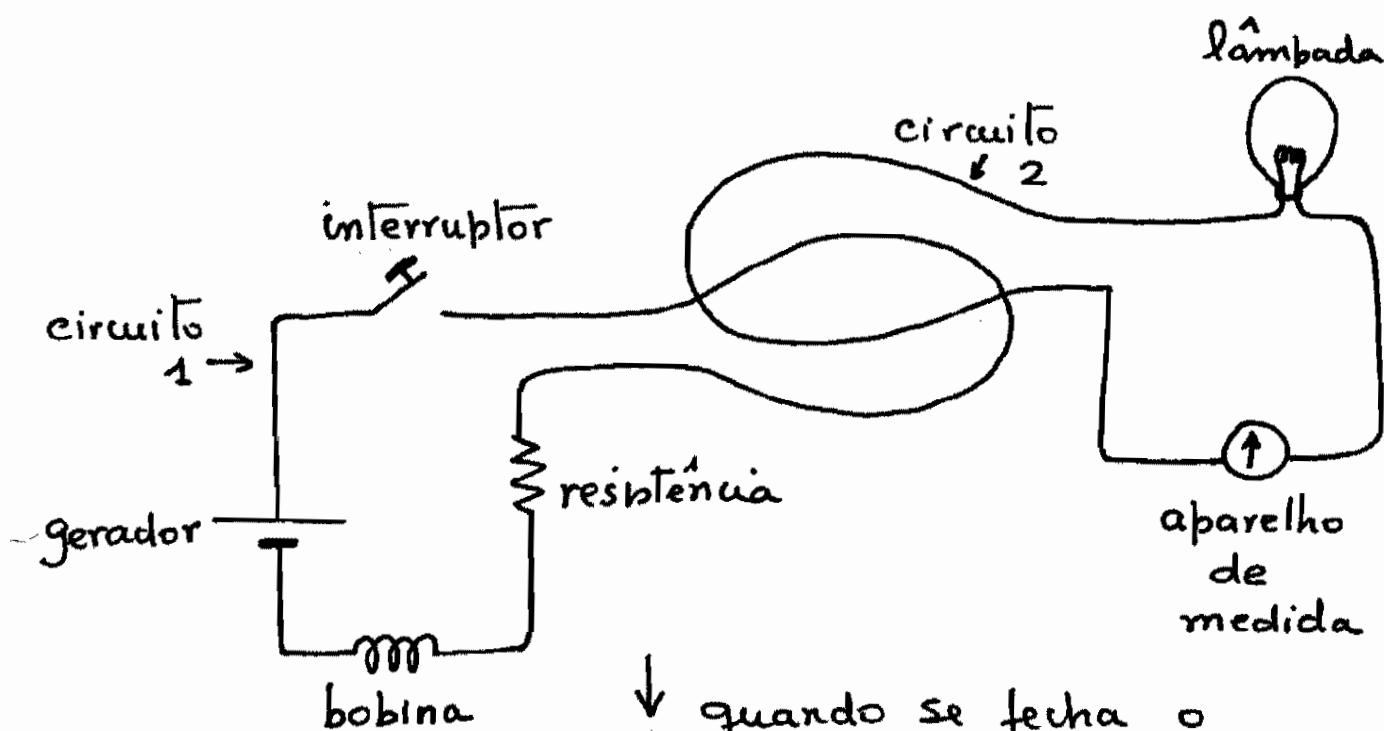
A expressão $\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}$ é usada para definir o ampere (A).

A indução electromagnética ~ 1831

M. FARADAY ; J. HENRY ; H. LENZ



→ quando o íman se move rapidamente para dentro e para fora da bobina, é detectada uma corrente no circuito, ora num sentido, ora noutra.



↓ quando se fecha o interruptor, regista-se passagem de corrente no circuito 2 durante o intervalo de tempo que decorre até se estabelecer uma corrente constante no circuito 1.

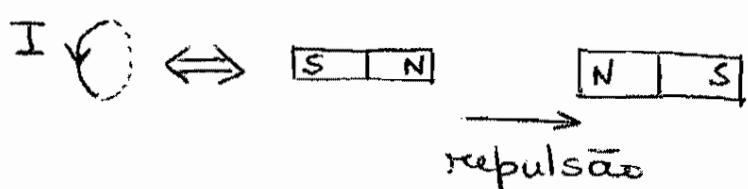
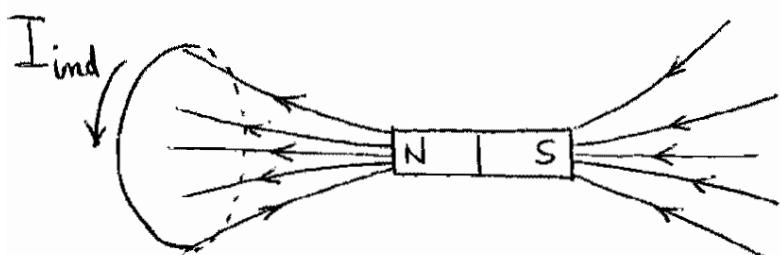
"força" electromotriz

induzida : é uma grandeza escalar; exprime-se em volts (V) no sistema SI .

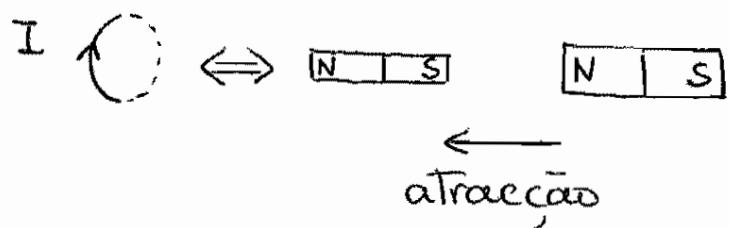
$$\Sigma_{\text{ind}} = - \frac{d\phi_{\text{mag}}}{dt}$$

Ilustração da Lei de Lenz

- (a) aproximação do íman: aumenta o fluxo através da espira \rightarrow então a corrente na espira é tal que o magnete seja repelido

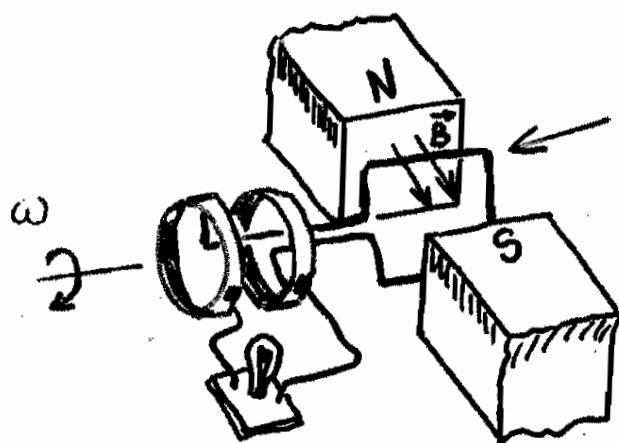


- (b) afastamento do íman: diminui o fluxo através da espira \rightarrow então a corrente induzida é tal que o magnete será atraído.



Lei de Lenz: a corrente induzida num circuito tem um sentido tal que o seu efeito vai contrariar a variação de fluxo que esteve na sua origem.

Geradores de corrente alternada



espira que roda
numa região onde
existe um campo
magnético \vec{B}

O fluxo magnético que atravessa cada espira é $\Phi = \vec{B} \cdot \hat{m} A$

↑ área da espira

$$\Phi_{\text{total}} = N B \cos \theta A$$

↑ ↑
 n.º de espiras ângulo de \vec{B} com \hat{m}
 da bobina \hat{m} ← normal ao plano
 da espira

Se a espira rodar com velocidade angular constante $\omega \Rightarrow \theta = \omega t + \alpha$

$$E_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{NBA\omega}_{E_0} \sin(\omega t + \alpha)$$

↑ fase na origem

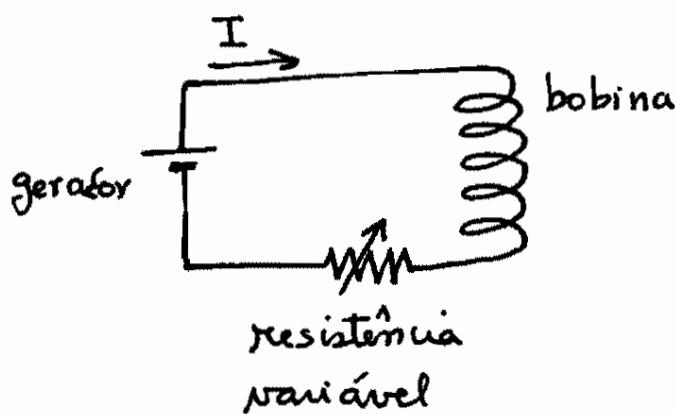
$$\text{ou } E(t) = E_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$E_0 \leftarrow$ amplitude da f.e.m.

$$\text{Corrente induzida :}$$

$$I_{\text{ind}} = \frac{E(t)}{R} = \frac{E_0}{R} \sin(\omega t + \alpha) = I_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

Auto-indução



O fluxo total que atravessa a bobina é

$$\Phi_{\text{total}} = N \phi = L I_{\text{cada espira}}$$

A indutância L é uma característica da bobina que depende da sua geometria, das suas dimensões e do material existente no seu interior.

Quando a corrente no circuito varia com o tempo, surge uma força electromotriz auto-induzida:

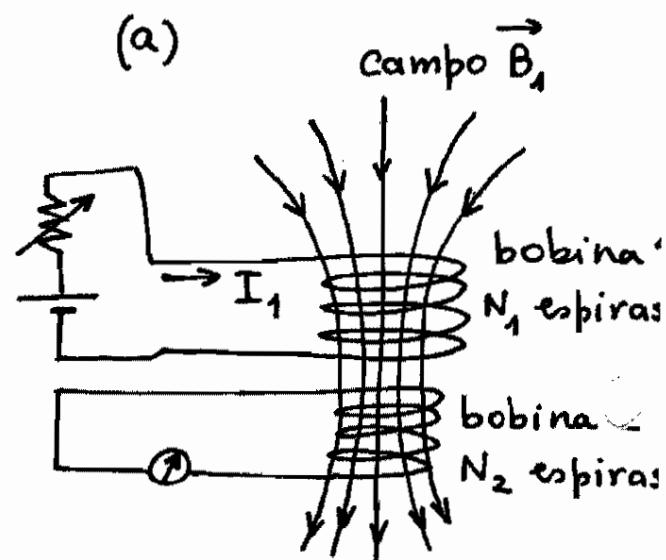
$$\Sigma_{\text{ind}} = -N \frac{d\phi}{dt}$$

ou

$$\Sigma_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}$$

Indução mútua

- O fluxo que atravessa a bobina 2 quando a corrente I_1 varia é $N_2 \phi_{21}$



- A f.e.m. induzida no circuito 2 é

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} \quad \text{com} \quad \frac{d\phi_{21}}{dt} \propto \frac{dI_1}{dt}$$

- A constante de proporcionalidade é a indutância mútua entre o circuito 1 e o 2 :

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

De modo análogo para o esquema (b)

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

$$\text{com} \quad \frac{d\phi_{12}}{dt} \propto \frac{dI_2}{dt}$$

$$\text{Assim} \quad \mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$M_{12} = M_{21} = M$ é a indutância mútua entre os dois circuitos : depende da forma, dimensões e orientação relativa dos circuitos.

